INSTITUT FOR MATEMATISKE FAG, KU

m

Efteruddannelse og udviklingen af brug af computerbaserede matematikprogrammer i gymnasiet

u

c

Rapport til Undervisningsministeriet

CENTER FOR COMPUTER BASERET MATEMATIK UNDERVISNING

KØBENHAVNS UNIVERSITET

Rapport til UVM

Efteruddannelse og udviklingen af brug af computerbaserede matematikprogrammer i gymnasiet

Forord

Nærværende rapport er en evaluering af et fireårigt projekt gennemført af Center for Computerbaseret Matematikundervisning (CMU) på Institut for Matematiske Fag, Københavns Universitet (MATH). CMU blev i efteråret 2013 oprettet med støtte fra MATH med kontakter til lærere og beslutningstagere på alle niveauer i uddannelsessystemet, didaktikere og forskere samt aftagere inden for erhverv og uddannelse med det formål at fremme udviklingsarbejde inden for brug af computere i gymnasiets matematikundervisning.

Oprettelsen af CMU skete på baggrund af to tidligere projekter[1], hvor MATH bidrog med projektledelse og kvalitetssikring. Støtte fra Industriens Fond (IF) har muliggjort gennemførelsen af projektet. Undervisningsministeriet (UVM) har givet støtte til videnopsamling, evaluering samt formidling. Rapporten kan læses af alle interessenter, men har UVM som primær modtager og er baseret på interviews med udvalgte projektdeltagende lærere, evalueringer af seminarer og feedback fra coaches på workshops. Endeligt indgår erfaringer fra udlandet i form af konferencedeltagelse og samtaler med internationale aktører, med ideer, formål og initiativer, der flugter med CMU's. Det skal understreges, at der er tale om en evaluering, og at konklusioner og anbefalinger i rapporten skal ses i lyset heraf.

[1] I skoleåret 2008-10 gennemførtes et pilotprojekt om computerbaseret matematik i gymnasiet. Projektet, der var støttet af Undervisningsministeriet (UVM), afsluttedes med en konference d. 26/10-2010 se http://www.math.ku.dk/english/research/conferences/2010_and_before/computere_og_matematikundervisning. Erfaringerne indgik i et nyt projekt afviklet i skoleårene 2011-13 støttet af dialogforum. Rapporterne udarbejdet i forbindelse dermed kan rekvirere ved henvendelse til cll@math.ku.dk. På baggrund af nogle af rapportens konklusioner, at ansøgningen til nærværende projekt skal ses.

Målgruppe og Hovedbudskab

CMU's projekt har haft et dobbelt sigte:

- Gymnasiets udstrakte brug af computerværktøjer er underlagt to modsatrettede forhold: På den ene side et potentiale for at øge elevernes matematikfaglige indsigt og rækkevidde betragteligt, på den anden side en **risiko for faglig udvanding** og reduktion til trivielle rutiner. CMU's mission har været at fremme den **progressive brug af computere** og derved at modvirke de uheldige tendenser. Hvilke matematikfaglige og didaktiske tiltag skal der sættes i værk for dette?
- Hvordan tilrettelægges en **faglig efteruddannelse**, så man sikrer at det får udbredelse og bærekraft i gymnasiets matematikundervisning?

CMU's arbejde med disse to spørgsmål har resulteret i gennemførelse af mere end i 50 undervisningsforløb ved individuelle lærere fra alle niveauer i STX, HTX, HHX og 8 skoleprojekter med samarbejdende lærere fra et gymnasium. I alt har mere end 90 lærere fordelt på 27 skoler deltaget.

Hvad angår det fagdidaktiske har tre forhold vist sig som særligt afgørende

- Et dilemma mellem lærerens design af computerbaserede situationer ud fra forestillinger om elevernes læringsveje og elevernes faktiske aktiviteter. Vi har kaldt dette dilemma for **Sliderfælden.**
- Betydningen af lærerens **strategiske valg** af brug/ikke-brug af computerteknikker i relation til matematikfaglige kernekompetencer. Med en virksomhedsøkonomisk metafor har vi kaldte dette **Out- og insourcing.**
- Det kræver meget eksplicit opmærksomhed og er ofte overset at eleverne (og lærerne!) skal udvikle mentale skemaer om og færdigheder i målrettet computeranvendelse. Dette benævnes i faglitteraturen som **instrumentel genese.**

Rapporten indeholder adskillige illustrative eksempler.

Efteruddannelsen har været tilrettelagt efter principper for aktionsforskning, karakteriseret ved

- En struktur for **refleksiv praksis**
- Udgangspunkt i den enkelte lærers **eget ståsted og ønsker** om faglig og didaktisk udvikling
- Personlig kollegial **coaching** gennem hele processen

Coachene fungerer gennem kollegial sparring, faglig og didaktisk rådgivning og fastholdelse af projektafviklingen. At mere end **90 % af de tilmeldte** lærere har gennemført undervisningsforløb og afrapportering er helt ekstraordinært og kan tilskrives vores unikke coachingkoncept.

En af Matematikudredningens (Jessen, Holm, & Winsløw, 2015) hovedpointer er at faglig udvanding ved brug af computere er et alvorligt problem. Endvidere pointeres at der er et stort behov for faglig og didaktisk efteruddannelse. Matematikkommissionen, der havde CMU's leder Niels Grønbæk som formand, adresserer disse pointer yderligere i dens anbefalinger for implementering af reformen af Gymnasieloven (UVM, 2017). CMU's arbejde er således i særdeles god overensstemmelse med de aktuelle tiltag for de gymnasiale matematikuddannelser.

Indhold

0. Baggrund	5
1. Projektets formål	6
2. Praktisk tilrettelæggelse	7
3. Medvirkende og deres hovedopgaver	10
4. Gennemførte aktiviteter i form af møder konferencer mv.	11
5. Projektets hovedresultater	15
6. CMU's projektmodel som en model for efteruddannelse	16
6.0 Indledning	16
6.1 Vilkår for gymnasial efteruddannelse	17
6.2 Inspirationen til CMU's projektmodel som en model for efteruddannelse	20
6.3 Hvad har vi lært – hvilke spørgsmål rejser det?	21
7 "CAS og matematik"	23
7.0 CMU og historien om CAS i det danske gymnasium	23
7.1 CMU's tilgang	28
7.2 Perspektiver på CMU projekter	31
8. Opsamling	44
9. Bibliografi	46

0 Baggrund

I årene efter 2005 gymnasiereformen sås en voldsom udvikling i brugen af computer i matematikfaget både i gymnasiet og på videregående uddannelser, som har affødt et behov for efteruddannelse af gymnasielærere med et fokus på, hvor CAS fører matematik og matematikundervisningen hen. Vores intuition var dels at CAS var mere end en videreudvikling fra grafregneren og dels at CAS – ikke computeren og IT[2] - transformerede matematikfaget i væsentlig grad, idet det *specifikke* CAS-værktøj ikke alene kræver matematik for at kunne bruges, men også at det producerer matematik, som må fortolkes. Forløberen for CMU - dialogforumprojektet (se fodnote 1)) adresserede dette behov og disse udfordringer. Mange af de deltagende lærere vidste at konstruktiv brug af computerbaserede matematikprogrammer giver muligheder for at tilføre (gymnasie)matematikken nye dimensioner i form af en behandling af avancerede emner der peger

[2] Disse rejser også udfordringer, som vi ser på senere, men vi var ikke så bevidste om dem på daværende tidspunkt.

fremad, behandling af problemstillinger der går i dybden samt nye tilgange hvor man undersøger og præsenterer matematiske problemer.

Dialogforumrojektet viste også, at CAS-mulighederne for at modellere, kan motivere brug af matematisk modellering i andre fag, og at CAS i den introducerende undervisning kan være med til at fastholde stringens i forhold til matematiske begreber og procedurer. Omvendt er en matematik-reducerende tilgang en fare der lurer hele tiden – ikke kun i områder hvor der satses på anvendelse som i regression og Chi-i-anden test, men også mange andre steder hvor software som Maple og TI-Nspire kan blive reduceret til en slags redskab til opgaveløsning - ikke mindst i forbindelse med løsning af eksamensopgaver. Dels er det vigtigt at denne pragmatiske tilgang[3] begrænses og, at der når den bruges arbejdes med tilgange hvor eleverne i højere grad får fat i matematikken. Dels må der arbejdes med opgavetyper og eksamensformer der bedre understøtter det læringsmæssige potentiale i programmer som Maple og TI-Nspire.

Et af de vigtigste afkast af dialogforumprojektet var at MATH besluttede at oprette Center for Computerbaseret Matematikundervisning. Centrets formål er at forestå efteruddannelse og gennem erfaringsopsamling og videndeling at stimulere at der fortsat i gymnasieskolen foregår udviklingsarbejde med computere hvor det matematiske indhold er i fokus.

1. Projektets formål som beskrevet i den oprindelige ansøgning

Hovedformålet var overordnet set at videreudvikle på erfaringerne fra det eksisterende samarbejde mellem skolerne og MATH med henblik på at kvalitetssikre matematikundervisningen i de gymnasiale uddannelser. Projektets afsæt var, at implementering af matematiksoftware i uddannelsessystemet er sket ud fra en forestilling om mange nye muligheder for at analysere og præsentere matematik og at en konstruktiv udnyttelse heraf i undervisningen vil bidrage afgørende til betragteligt kompetenceløft hos mange elever[4]. Erfaringerne fra tidligere projekter[5] er ikke i modstrid hermed, men det kræver, at computerkompetencerne forbindes med de mere generelle færdigheder og forståelsesmåder, som matematikfaget tilbyder. Det er endvidere vigtigt at fastholde et perspektiv på de kompetencer, der efterspørges i erhvervslivet og de videregående uddannelser (Konferencen Fremtidens Matematik, 2014)

[3] Dvs. en tilgang hvor fokus er på brugervenlighed og effektivitet i udførelsen af en opgave.
[4] Se eksempelvis STX bekendtgørelsen
[5] Se ovenfor

Nærmere bestemt er det projektets formål at udvikle en model for efter-/videreuddannelse, hvor lærerne selv skal være drivkraften i udviklingen af undervisningsforløb med dette sigte. Dette kræver understøttelse i form af sparring, videndeling og kvalitetssikring. CMU har derfor ansat et antal coaches til sparring og inspiration, og centrets placering på Københavns Universitet sikrer forbindelse til forskning i forholdet mellem computere, matematik og læring. CMU's model for udvikling af undervisningsforløb er samtidigt en form for aktionsforskning, som muliggør at få mange forskellige matematiktemaer sat i spil gennem deltagende læreres ideer og forslag til forløb. Coaches rolle er her at sikre en vis homogenitet i forhold til at evaluere forløbene og diskutere erfaringerne med henblik på at videreformidle og muliggøre mere overordnede didaktiske tilgange.

I overensstemmelse hermed vil efteruddannelsesperspektivet samt forholdet mellem computerbrug og det intenderet matematikindhold være de to overordnede temaer belyst i rapporten.

2. Praktisk tilrettelæggelse

Grundstenen i projektet har været et årligt antal CMU-projekter. Succeskriteriet i denne forbindelse var at projektet skulle være i stand til at tiltrække opmærksomhed fra skoleledere og undervisere, så denne form for udviklingsarbejde bliver en integreret del af lærernes kompetenceudvikling og at over de første 3 år skal mindst 50 lærere fra 20 skoler have været involveret[6].

Årshjulet for afvikling af et CMU-projekt har bestået af forskellige faser;

- Rekruttering
- Projektbeskrivelse
- Gennemførelse af den praktiske del af projektet
- Projektafrapportering

Rekruttering til projekterne har været noget forskelligartet. Nogle deltager er kommet via CMU ledelsens eller coachenes netværk, nogle gennem kendskab til CMU via tidligere projektdeltagere og nogle gennem kontakter i de faglige foreninger. CMU's tilbud om projektdeltagelse har været annonceret i LMFK, CMU har ved to lejligheder præsenteret deres arbejde på konferenceserien Mød MATH på KU (CMU, CASmatik eller CASseret?, 2015) og i den forbindelse gjort opmærksom på sig selv og mulighederne for at gennemføre et CMU projekt. Velvillige regionalledere, konference- og kursusarrangører har givet CMU taletid ved deres arrangementer.

[6] Se Bilag 1. Projektdeltagere Samlede Oversigt, hvor der fremgår at 57 lærere fra 26 skoler har deltaget. Derudover deltog omkring 35 lærere fra 6 gymnasier i et særlig forløb tilrettelagt i samarbejde med DASG (Danske Science Gymnasier)

Endeligt har der været fulgt op på indsatsen ved afholdelsen af inspirationsmøder, hvor interesserede lærere kunne møde CMU ledelsen, bliver præsenteret for CMU's mission, at fastholde en sund matematisk praksis i et CAS-miljø, samt vores syn på lærere som reflekterede praktikere. Ved sådanne lejligheder kunne man også møde en/sin coach og diskutere mulige ideer til et projektforløb samt få afklaret hvorledes et projekt kunne afvikles og hvilke produktkrav, der skulle honoreres. I denne fase var der projektdeltagere der havde ideer til emne, materiale, undervisningsforløb, samt en ide til hvorledes samspillet mellem værktøj og matematik kunne bringes i spil, andre en tilkendegivelse om deltagelse – nogle ud fra en forestilling om at de nok skulle finde på noget inden fra rammerne af det CMU kunne tilbyde, nogle med en forestilling om at med coachens hjælp skulle de nok nå i mål med en projektbeskrivelse.

Arbejdet med projektbeskrivelsen startede for nogle, der hvor rekrutteringen slap. Hos andre var det en integreret del af denne. Nogle deltagere havde skitserne til et projekt klart, der kun manglede lidt tilpasning, og for hvem et CMU projekt muliggjorde projektets realiseringen, andre deltagere skulle hjælpes på vej af deres coach. Hjælpen havde mange former – det kunne være til valg af godt emne, praktisk tilrettelæggelse, didaktisk hensyn, udarbejdelsen af materialer, mm. Alle områder man som lærer sædvanligvis er fortrolig med, men nu med den tvist at det er matematik baseret på brug af CAS der er på spil.

Hvis der fra skolens eller projektdeltagerens side var ønske om en skriftlig kontrakt på deltagelse, blev denne udfærdiget[7]. I mange tilfælde var en mundtlig aftale med læreren fuldt tilstrækkelig. Gennemførelsesraten forstået som antal fuldt afrapporteret projekter i forhold til påbegyndte projekter, hvor en coach har været tildelt, har været høj.[8]

Projekt kunne gennemføres på egen hånd eller sammen med en eller flere kollegaer. På et par af skolerne var intentionen at alle matematiklærere skulle gennemføre et projekt. Et enkelt samarbejde bestod af lærere fra hhv. folkeskole og gymnasium. Den praktiske del af projektgennemførelsen bestod for læreren af udarbejdelsen af materiale, planlægning, gennemførelse og evaluering af undervisningen knyttet til projektet. Coachenes rolle var her at assistere, rådgive, sparre, være aktive lyttere, m.m. - alt efter behov og ønsker fra projektdeltagerne og i større eller mindre grad i

[7] Bilag 2. Aftalepapir om CMU projekter
[8] Der er 50 projekter afrapporteret ud af 57 mulige - samt lovning på et mere, hvor detaljer mangler.

forhold til de forskellige faser af den praktiske gennemførelse. Mødet mellem coach og lærer kunne være medieret elektronisk eller være på eller uden for lærerens skole. I enkelte tilfælde tog mødet mellem coach og lærer udgangspunkt i coachens overværelse af en lektion.

Projektafrapporteringen faldt i to dele – først i en mundlig på et seminar ved Holbæk og dernæst i en skriftlig på baggrund af feedback fra seminaret. Den skriftlige afrapportering skete et form af et projektresume til CMU's hjemmeside[9].

To styredokumenter blev udarbejdet, et hvor rammerne for den reflekterende praktikers gennemførelse af et CMU-projekt er udformet i det vi har kaldt SSS-modellen[10], samt en skabelon for projektpræsentationen.
SSS-modellen består i en beskrivelse af projektets **S**tartsted opfattet som det enkelte projekts oplæg og overordnede bærende idé, af den konkrete **S**tafet der løbende forbinder de enkelte dele af undervisningen med hinanden, og af den **S**løjfe der forbinder den bærende idé med den gennemførte undervisning gennem evaluering af forløbet samt de refleksioner der affødes af tilbageblikket. Modellen blev udarbejdet sammen med coachene og fungerede som retningsgivende for et CMU-projekts afvikling.

Skabelonen til projektpræsentationen skal ses i sammenhæng med udarbejdelsen af det samlede projektresume og var det dokument man skulle skrive ind i som forklæde for dette. I forklædet linkes der til andre dokumenter; den oprindelige projektbeskrivelse, undervisningsplaner, div. arbejdsark, opgaver, CAS filer, refleksioner, osv. Der var ikke krav til samme uniformitet i disse dokumenter. Skabelonen havde flere formål – at skabe en ensartethed i præsentationen på hjemmesiden og herved lette en sammenligning af projekter samt at fungere som tydeliggørelse af produktkrav med en opdeling af præsentationen i *Titel*, en kort indledning *Om Projektet*, de *Refleksioner over praksis* man har gjort sig og projektets *Konklusioner*. Sammen med skabelonen blev der også udarbejdet vejledninger til udfyldelse af skabelon samt til projektresumeet som sådan. Såvel skabelonen til projektpræsentation som vejledning til det samlede projektresume blev udarbejdet i samarbejde med coachene. For coachene fungerede dokumenterne dels som redskab i coaching, dels som en skriftlig påmindelse om de aftaler mht. produktkrav, der blev truffet.

[9] En uddybende beskrivelse findes nedenfor. Link til projektpræsentationerne; http://cmu.math.ku.dk/projekter/
Øverst til høje på siden findes endvidere skabelonen der skal anvendes til afrapportering.
[10] Se Bilag 3. Projektbeskrivelse SSS

Endeligt var dokumenterne en del af CMU's udviklingsarbejde – de blev jo også brugt internt i ledelsen som afklaring, fordi vi ikke havde en etableret praksis.

3. Medvirkende og deres hovedopgaver

CMU's centerledelse, der har stået for den overordnede planlægning og gennemførelse af projektet, har bestået af professor Niels Grønbæk, Institut for Matematiske Fag, Københavns Universitet, samt lektor Claus Larsen og lektor Henrik Bang, begge Christianshavns Gymnasium.

Det væsentligste organisatorisk tiltag har været at oprette en gruppe af coaches med den overordnede opgave at mediere kontakten til CMU og sikre projekternes gennemførelse. Blandt deres opgaver har været at bistå projektdeltagerne i transformering af ideer til en egentlig projektbeskrivelse, hjælp med programmering og håndtering af CAS værktøj, sparring med projektdeltagerne i deres planlægning, gennemførelse og evaluering af undervisningsforløb, samt bistand i forbindelse med projektevaluering og –afrapportering – dels ved præsentationen af projekterne ved årets afsluttende seminar og dels ved udformning af materiale til projektresumeet på CMU's hjemmeside. Disse multifacetterede arbejdsopgaver kræver ressourcefulde lærere, der har matematik- og CAS-kompetencerne i orden, har didaktisk indsigt samt er gode kommunikatorer. Inspirationen til at bruge coach er hentet fra DCN[11], men elementer fandtes allerede i udviklingsgruppen tilknyttet dialogforumprojektet bestående af lærere fra de deltagende skoler, der skulle fungere som tovholdere, samt sparre med projektledelsen. De første coaches der blev ansat blev også hentet fra denne gruppe af lærere.

Den overordnede planlægning af kurser, internater samt afsluttende seminar har CMU's ledelse stået for, mens denne i fællesskab med gruppen af coaches har stået for detailplanlægning af internater. Coachgruppen har endvidere sparret med ledelsen vedrørende oplæg på internaterne, konferencebidrag samt på indholdet af slutkonference.

Claus Larsen har været kontaktperson til økonomiafdelingen og til webmaster, samt hovedansvarlig for organisering og opsamling af projektafrapporteringerne, mens Henrik Bang har været sekretær og ansvarlig for referater ved ledelsesmøder, coachworkshops og seminarerne for projektdeltagere.

---

[11] Dansk Center for Naturvidenskabsdidaktik, et konsortium af naturvidenskabelige fakulteter ved danske universiteter 1998-2001, som bl.a. iværksatte universitetspædagogiske udviklingsprojekter. DCN havde ankerpersoner på hvert deltagende fakultet. Ankerpersonerne vurderede projektforslag og var støttepersoner i forhold til gennemførelse af projekter og efterfølgende afrapportering.

Claus Larsen og Henrik Bang har gennemført evaluering af undervisningsforløbene, samt haft ansvar for projektevaluering og rapportskrivningen.
Niels Grønbæk har haft den daglige kontakt til MATH, samt kontakten til Industriens Fond, UVM og Maplesoft[12]. Som centerleder har Niels Grønbæk kontakt til bestyrelsen og været den øverste ansvarlige beslutningstager.

CMU's bestyrelse består af

- Troels Vang Andersen, Christianshavns Gymnasium
- Bjørn Grøn, Rysensteen Gymnasium
- Bodil Bruun, UVM (indtrådt 24. november 2015)
- Carl Winsløw, IND
- Michael, Sørensen, MATH KU
- Olav Lyndrup, Nykøbing Katedralskole, DASG
- Marit Hvalsøe Schou, MBUL (udtrådt 12. maj 2015)
- Karsten Schmidt, DTU Compute

4. Gennemførte aktiviteter i form af møder konferencer mv.

I den indledende fase var ledelsen – i tæt samarbejde med de første coaches - i høj grad fokuseret på at udarbejde retningslinjer for coaching, afrapportering og opbygning af hjemmeside.

Efterfølgende har der igennem hele projektforløbet været afholdt møder i ledelsesgruppen vedrørende daglige drift og planlægning af evalueringer, internater, workshops, seminarer, samt konferencedeltagelse og -afholdelse. De fleste møder har ud over et logistisk/praktisk indhold med henblik på at facilitere projektets forskellige begivenheder, tillige haft et didaktisk indhold.
Gennem hele projektforløbet har der årligt været afholdt 2-3 møder mellem CMU-ledelsen og gruppen af coaches. Et årligt møde har været afviklet som workshop. Som fast punkt på alle møder har coachene gjort status på deres projekt portefølje. Centerledelse har endvidere fået input fra coachene til planlægning af de begivenheder nævnt ovenfor. Workshops og de fleste af de andre møder har tillige haft et didaktisk indhold.

[12] Maplesoft har støttet projektet med et mindre beløb

Foruden kontakten til projektdeltagerne medieret af coachene har der været afholdt årlige internatmøder på Søminestationen ved Holbæk.[13] Som nævnt ovenfor har projektdeltagerne her haft mulighed for at præsentere deres CMU-projekt, hvor præsentationen desuden har været en integreret del af projektets færdiggørelse. På internaterne har projektdeltagerne kunne hente inspiration fra didaktiske oplæg og f.eks. oplæg fra repræsentanter for opgavekommissionen og videregående uddannelsesinstitutioner samt fra fagkonsulenten i matematik, mens CMU har kunne få et nærmere indblik i projekterne som udtryk for praksis med CAS, samt få projektdeltagerne i tale.

Foruden den centrale opgave i at udvikle efteruddannelse om CAS har CMU også søgt og bidraget til inspiration internationalt.

CMU deltog på International Congress on Mathematical Education (ICME), hvor vi var initiativtager til og medarrangør af en Thematic Discussion Group, Challenges in Teaching Praxis When CAS Is Used in Upper Secondary Mathematics (Bang, Groenbaek, & Larsen, Discussion Groups/Workshops , 2016).

CMU deltog på CERME 10 i Thematic Working Group 15 (TWG 15), der omhandlede Teaching Mathematics with Technology and Other Resources. CMU havde to bidrag til arbejdsgruppen:

- Niels Grønbæk præsenterede artiklen "Out- and insourcing, an analysis model for use of instrumented techniques" (Bang, Grønbæk, & Larsen, 2016).
- CMU præsenterede en poster om "Coaching and engaging. Developing teaching with CAS in High School" (Bang, Grønbæk, & Larsen, 2016) .

Deltagelsen på de internationale konferencer har givet indblik i forskningen inden for teknologi samt et udsyn til hvilken rolle teknologi spiller i matematikundervisningen ude i verden. Erfaringer herfra kan spejles i erfaringer fra deltagelse i en række nationale konferencer.[14]

En af inspirationskilderne ved CMU's oprettelse var The UCLA Curtis Center[15] på University of California, Los Angeles, USA, som er et universitetssitueret center med kontakt til alle dele af det amerikanske uddannelsessystem. I foråret 2015 besøgte CMU-ledelsen Curtis Center med det formål at få et indblik i et veletableret universitetscenters erfaringer med kvalitetssikring og

[13] Program og deltagerliste for de tre internatmøder fremgår af bilagene 4a, 4b & 4c og 5a, 5b & 5c.
[14] Samarbejdet med gruppen bag Matematik med IT se http://matematikmedit.dk/ kan her nævnes eksplicit, da det har givet anledning til en ansøgning om et fælles projekt.
[15] http://curtiscenter.math.ucla.edu/

samarbejde med lærere fra andre niveauer i uddannelsessystemet. I forbindelse med forberedelserne stødte vi på et andet interessant initiativ på British Columbia Institute of Technology (BCIT), der i samarbejde med erhvervslivet havde udviklet et program henvendt til canadiske high school lærere med Maple TA[16] som platform. Besøgene på de to institutioner var meget vellykkede og gav indsigt i mulighederne og udfordringerne som aktør i feltet mellem udvikling, forskning med tæt kontakt mellem videregående uddannelsesinstitutioner og en række aktører i undervisningssystemet.

CMU havde oplæg på konferencerne Mød MATH på KU i 2014 (CMU, CAS i matematikundervisningen, 2014) og 2015 (CMU, CASmatik eller CASseret?, 2015);

Den afsluttende konference afholdtes på Institut for Matematiske Fag, Københavns Universitet.[17]

Publikationer

Det tilstræbte matematikindhold og teknologi – spiller det sammen? MONA-kommentar til Morten Misfeldt: *Trekantberegning og teknologi* (Bang & Larsen, 2014).

Hvem skal samle handsken op? Kommentar til MONA-artikel *Udfordringer ved undervisning i enzymer* (Bang, Grønbæk, & Larsen, 2015).

Matematik i samspil. Præsentation. CMU's centerleder Niels Grønbæk deltog med et bidrag på Danske Gymnasiers åbne høring *Hvad vil vi med matematikken?* på Christiansborg den 2. februar 2016.[18]

CMU på vej mod år 3 – Hvad har vi lært, hvor vil vi hen? - Artikel i Matematik-, Fysik- og Kemilærerforeningernes blad LMFK-bladet (Bang & Larsen, 2016).

Matematik som struktureringsmiddel i undervisning med CAS. MONA-kommentar til artikel af Keith Nabb (Bang & Larsen, 2016).

CAS eller Ka'-Selv. Kapitel i *Matematik med it*, der både er titlen på et udviklingsarbejde og en ny grundbog (Grønbæk, 2016).[19]

Andre Aktiviteter[20]

---

[16] Maple TA (Teachers Assistant) er et prøve- og aktivitets miljø.

[17] Se program; http://cmu.math.ku.dk/kalender/afsluttende-cmu-konference/ og som MATH Nyhed; http://www.math.ku.dk/om/Nyheder/erfaringer-med-computerbaseret-matematikundervisning/

[18] http://cmu.math.ku.dk/nyheder/dg-hoering/

[19] http://cmu.math.ku.dk/nyheder/cas-eller-ka-selv/

[20] To andre aktiviteter fortjener at blive nævnt selv om de ikke var del af nærværende projektet

Delvist for at gøre opmærksom på CMU og for at spejle vores aktiviteter i den matematik som efterspørges både på videregående uddannelser og i erhvervslivet planlagde CMU i samarbejde med DTU Compute "Fremtiden Matematik"[21]. Baggrunden var forestillingen om at der er en fælles interesse i at skabe mere opmærksomhed om fremtidens brug af matematik, således at samfundets investering i matematik giver størst mulig værdiskabelse.

Vi tænkte derfor at holde en konference der præsenterede et bredt syn på hvilke matematikkompetencer, der bør udvikles. Gennem oplæg fra en meget bred kreds af brugere af matematik (på gymnasieniveau og derover) fik man et indblik i hvordan forskellige aktører, som bruger og/eller producerer matematik ser på kerneværdierne i den traditionelle matematik, hvilke dele tiden har gjort mindre aktuelle, og hvilke nye matematikkompetencer der bør udvikles.[22]

Både i skoleåret 2014/15 og 2015/16 samarbejdede CMU med Danske Science Gymnasier (DASG), hvor CMU's projektmodel blev tilpasset DASG's kursusmodel. I skoleåret 2015 var der så få deltagere fra DASG at de blev integreret i CMU's almindelige projektportefølje, men i 2015/16 blev forsøgt en model med skolebaseret efteruddannelse hvor 6 (oprindeligt 7) gymnasier i det storkøbenhavnske område fik en gruppe lærere efteruddannet med brug af coaching og seminarer. DASG samarbejdet kørte økonomisk og organisatorisk adskilt fra de øvrige projekter, og der blev ansat coaches specielt til disse projekter finansieret af DASG. Den skolebaserede model fungerede noget anderledes end den ovenfor beskrevne, men det bærende princip var også her coaching af projektdeltagerne med udgangspunkt i egne ideer. Der er lavet en særskilt kort evaluering af disse projekter som kan rekvireres på CMU. Rapporteringen ligger tæt op ad CMU projekterne, men har et særligt format der tager hensyn til at det er skoleprojekter[23]. Rapporteringerne kan findes på CMU's hjemmeside.[24] DASG har sidenhen adopteret coaching som et element i flere af deres andre efteruddannelsestilbud.

5. Projektets hovedresultater

[21] Konferencen blev finansieret af MATH KU og planlagt i efteråret 2013 og afholdt i foråret 2014
[22] Program, deltagerliste og præsentationer kan ses her; http://cmu.math.ku.dk/konference_fm/
[23] Se http://cmu.math.ku.dk/projekter/
[24] Se Skoleprojektpræsentationerne; http://cmu.math.ku.dk/projekter/dasg/ Øverst til høje på samme side siden findes endvidere skabelonen der skal anvendes.

Lærernes[25] (dokumenterede) CMU-projekter udgør en vigtig del af det der er opnået gennem projektet. Sammen med interview og præsentationerne på internaterne er det med baggrund i disse at vi på CMU kan sige noget om praksis mht. CAS-brug i gymnasiet. Der forestår stadigt en del analysearbejde af materialet, der ligger uden for rammerne af denne rapport, men vi tager sidst i nærværende rapport hul på hvorledes en sådan kan udfoldes og hvilke teoretiske overvejelser der ligger bag.

I forbindelse med CMU-projekterne er der blevet udviklet en substantiel mængde undervisningsmateriale i form af arbejdsark, skabeloner, standartbesvarelser, samt materiale til brug i forbindelse med større skriftlige opgaver, avanceret brug af CAS, CAS brugt undersøgende og brugt med henblik på at beherske værktøjet. Det skal i denne forbindelse bemærkes at et vigtig resultat af den projektpræsentationsform vi har valgt, muliggør en læsning af materialet inden for en kontekst, der mere eller mindre detaljeret omfatter klassetrin, emne, undervisningsforløb, formål, resultat, mm. Disse filer kan findes sammen med præsentationerne af projekterne på CMU's hjemmeside.

Der er afholdt tre internater, der primært har været en platform for projektdeltagernes præsentation af projekter. Derudover har der været oplæg fra inviterede gæster og fra CMU med forskellige perspektiver på CAS. Oplæg kan rekvireres ved henvendelse til CMU.

Gennem projektperioden er CMU's model med coachet efteruddannelse blevet udformet, justeret og tilpasset forskellige ønsker og praktiske forhold. Som start var det en model målrettet den enkelte gymnasielærer, men er udviklet så den passer til grupper af lærer på en skole såvel som enkelte eller grupper af lærere på tværs af uddannelsesniveauer i uddannelsessystemet.

6. CMU's projektmodel som en model for efteruddannelse

6.0 Indledning

[25] Det skal bemærkes at lærerne repræsenterer en bred vifte af standen. Den typiske projektdeltager er en erfaren lærer, med hovedfag i matematik eller fysik og fra hovedstadsområdet. Når det er sagt, har der været tale om en gruppe af lærere i alle aldre, med et enkelt års til et helt undervisningslivs erfaring, med andre fag som hovedfag (og -interesse), samt fra hele landet.

Generelt er korpset af lærere på de gymnasiale uddannelser fagligt veluddannet – om end der er visse krisetegn[26], hvoraf nogle har været kendt længe. Ser man på lærernes ønsker til efteruddannelse i det (fag)didaktiske – dvs. transformationen af lærerens matematikfaglighed til motiverende og inspirerende undervisning – er dette veldokumenteret[27], og kendt i endnu længere tid. Ikke mindst 1988-reformen med introduktionen af *aspekterne* motiverede mange lærere til en ny faglig efteruddannelse, dels fordi områder som ikke blev berørt på universitetsstudiet opprioriteredes og dels fordi en bredere rekruttering til gymnasiet satte et større fokus på (gymnasie)didaktikken. Denne tendens fortsatte efter 2005 reformen og navnlig efter at gymnasierne fik selveje afsatte skolerne mange ressourcer til efteruddannelse i mere almene temaer; Cooperative Learning, implementering af elektroniske tavler, elevmotivation, synlig læring, elektroniske platform, etc. Man kunne have forventet at introduktionen af CAS med 2005 reformen ville motivere en efteruddannelse i CAS, men denne er udeblevet, idet CAS frem for at understøttede matematikken fagligt i højere grad skulle understøtte matematikken som et undervisningsinstrument.

I 2008, da NØRD-skolerne indledte et samarbejde med MATH, var det med et udgangspunkt i at en række betænkeligheder mht. denne udvikling.

- Rent funktionelt sprængte den håndholdte CAS-lommeregneren rammerne for hvad et display kunne rumme - med submenuer, undermenuer og submenuer til undermenuerne. Det var derfor nærliggende at gå skridtet videre til computerbaserede CAS-programmer.
- Med computeren følger nye udfordringer. Computeren er et miljø ladet med intentionalitet, hvor forstyrrelser og faldgruber forekommer – såvel faglige som ikke faglige. Til de faglige hører de valg som softwareproducenter træffer på lærerens vegne, de valg som lærere f.eks. gennem ark træffer på forhold mellem matematik og software samt de mere eller mindre tilsigtede output eleverne møder og som skal adresseres. De ikke faglige kan være den umiddelbare adgang til sociale medier, reklame pop-ups, mm. men også adgang til faglige sider som Wolfram Alfa, apps og instruktioner, samt plagiatproblemer.
- Navnligt var der bekymringer[28] over at introduktionen af så slagkraftige værktøjer udhuler elevaktiviteten – eller rettere at der skal genopfindes helt nye opgaver og aktiviteter

[26] Se f.eks. Matematikudredningen.
[27] Ibid. S. 61
[28] Disse beskrives mere eksplicit i afsnit 7.0

(Drijvers, Monaghan, Thomas, & Trouche, 2014) CAS kunne ikke opfattes blot som en forlænger af de analoge processer.

Disse problemstillinger kan senere genkendes i Matematikudredningen (Jessen, Holm, & Winsløw, 2015) som f.eks. finder at 40% af lærerne i en FIP-undersøgelse peger på matematikværktøjer som en udfordring[29], men der er også mere grundlæggende strukturelt betinget udfordringer.

6.1 Vilkår for gymnasial efteruddannelse

Vilkårene for efteruddannelse er ændrede – efteruddannelse er langt nede på listen, når lærernes tid skal prioriteres og er dermed sårbar. På CMU har vi på meget konkret vis kunnet mærke følgerne af forskellige systemiske vilkår. Eksempelvis havde vi svært ved at skaffe projektdeltagere i anden halvdel af skoleåret 2013/14, da IF's bevilling muliggjorde iværksættelsen af tilbud om gennemførelsen af et CMU projekt – dels pga. manglende kendskab, men ikke mindst fordi timefagfordelingen var på plads og det for lærere ikke var muligt med en porteføljeudvidelse. Dette var et forholdsvist banalt og overkommeligt problem, men vanskelighederne forsatte i skoleåret 2014/15 da frustration, usikkerhed og modvilje blandt lærere som følge af resultatet af OK 13 affødte en tøven mht. deltagelse i initiativer, der rakte ud over det nødvendige eller sikre. En tilpasning til vilkårene indfandt sig samtidig med at kendskab til CMU-projekttilbuddet var blevet mere udbredt. Dette medførte den mest frugtbare periode i projektforløbet i skoleår 2015/16. Finansloven i 2015 for 2016 der for gymnasierne vedkommende betød besparelser frem til 2019, betød at det igen blev svært at tiltrække projektdeltagere, idet skolerne var usikre på hvad besparelserne rummede og at det trods alt var bedre at spare på efteruddannelse, end at afskedige lærere. Resultatet blev at flere lærere, som havde tilkendegivet interesse, trak sig. Beskeden fra skolen var at de såmænd godt kunne gennemføre et CMU-projekt, men inden for rammerne af deres forberedelsestid.[30]

Disse systemiske vilkår er dog synlige og derfor til at håndtere og overkomme, men CAS er også indført på et tidspunkt med mange andre skoledagsordner.

[29] Det er uklart om der her menes elevernes (uhensigtsmæssig?) brug eller brug af værktøjer til i tilstrækkelig grad at berige eleverne i deres matematikforståelse.
[30] IF har vist stor velvillighed mht. udvidelsen af projektperioden, således at den ansøgte projektportefølje kunne gennemføres.

- Selveje der blev indført i 2007. Rationalet er bl.a. at give skolerne frihed til at sætte egen dagsordner der er målrettet lokalområdet. Konsekvensen er dog også at gymnasierne kommer i en konkurrencesituation, der kan have gavnlige økonomiske konsekvenser, men også lægger gymnasierne under pres til at tilbyde attraktive rammer om et ungdomsliv.
- Indførelse af muligheden for at tage ekstra A-fag og dermed forhøjet sit eksamensgennemsnit med en faktor - 1,03 og 1,06 for hhv. et og to ekstra A-fag. Et umiddelbart godt tiltag, idet det giver dygtige og ambitiøse elever muligheder og passende udfordringer, men også med det resultat at det for mange bliver faktoren på eksamensgennemsnittet der virker tillokkende og ikke det ekstra fag i sig selv.
- Den måde studieretningerne fungerer på. Eksempelvis Samfundsfag på A-niveau bundet til Matematik på mindst B-niveau. En fornuftig kobling der åbner for at samfundsfag arbejder kvantitativt og at matematiske emneområder som hypotesetest og regression ses i spil i andre fag. For den enkelte elev på disse studieretninger er der imidlertid store forskelle på motiverne for deres valg – for mange er matematik et nødvendigt onde der følger med. I denne type studieretninger oplever man ofte at eleverne fordeler sig i to grupper i.f.t interesse for faget. Den ene del skal blot igennem så smertefri som muligt – dvs. sådan at man kan bruge ressourcerne på andre interesseområder, men sådan at det ikke går ud over karakteren i matematik.
- Mange videregående uddannelser har også stillet krav om matematik på B-niveau – også i fag uden for det natur- og det samfundsvidenskabelige hovedområde – med henvisning til matematikkens brugbarhed i deres fag. For elever, der ønsker (muligheden for) videreuddannelser der kræver Mat-B, er konsekvensen at de søger ind på Mat-B-studieretninger med de samme motiver som beskrevet ovenfor og med de samme konsekvenser. Matematikkundskaber er ikke mål i sig selv. Det er kun karakteren der skal bruges. Da der med Mat-B kravet ofte blot er tale om et indgangsfilter, kan man ikke fortænke eleverne i deres strategi.
- Der er en opmærksomhed på at gymnasierne ikke kun skal præstere fine eksamensgennemsnit, men også socioøkonomisk regulerede eksamensgennemsnit. Det er såmænd sympatisk nok, at gymnasierne får et instrument til at målrette indsatsen i forhold til socialt udsatte og dermed bruge uddannelsessystemet som løftestang til at udligne sociale skel. Konsekvensen er dog at skolernes og dermed lærernes præstationer vurderes og

sammenlignes[31] ikke kun på baggrund af eksamensresultaterne men også eksamensresultaterne renset for socioøkonomiske faktorer.

I alle disse skoledagsordner spiller karaktererne en rolle. En andet og mere fundamental udfordring for efteruddannelse er derfor den eksamensstyrede undervisning og den betydning karaktererne har i elevernes bevidsthed: *I det hele taget tegner der sig et billede af, at der blandt lærerne opleves en ubalance mellem det de gerne vil undervise i, og som de mener er vigtigt, sammenholdt med, hvad de føler sig forpligtet til at undervise i for at eleverne klarer sig bedst muligt til eksamen*[32].Prøver man at holde den faglige fane højt er der til gengæld fare for at eleverne klarer sig dårligt.[33] Når samtidigt mange rektorer bruger elevernes skriftlige eksamenskarakterer til at vurdere kvaliteten af den enkelte lærers arbejde[34] ser det noget dystert ud for CMU's mission om at promovere CAS-brug med matematikfaglige ambitioner: *Samlet set tegner der sig et billede af at matematiklærerne er under stærkt pres fra elever, ledelser og eksamensopgavernes udformning, og dette pres resulterer i et stærkt fokus på, at eleverne klarer visse typeopgaver godt, under intensiv brug af matematikværktøjsprogrammer. Dette hindrer tilsyneladende fokus på opfyldelsen af andre (fx bredere eller mere teoretiske) matematikfaglige mål,…*[35]

Værktøjsprogrammer spiller altså en ikke uvæsentlig rolle i de mere negative følgevirkninger af forskellige tiltag nævnt ovenfor, men lærerne synes parate til at tage handsken op; … *og lærerne efterlyser da også ideer og viden om hvordan man kan motivere, differentiere og løfte eleverne fagligt og på andre måder end ift. de skriftlige eksamensopgaver. Lærerne giver udtryk for, at jobbet forudsætter omstillingsparathed ved reformer, og de er også villige til at tilpasse og udvikle deres praksis, men efterspørger viden og værktøjer som er specifikt relevante for matematik. Der er altså på mange måder grobund for positiv udvikling, hvor rammerne for matematikundervisningen justeres, så der skabes større sammenhæng mellem mål og evalueringsformer, og lærerne gives de nødvendige ressourcer i form af relevant efteruddannelse og vidensdeling. I et videre perspektiv bør uddannelse og efteruddannelse af lærerkorpset gentænkes mhp. at skabe større sammenhæng*

[31] Selv om det er påpeget at dette hverken er ønskeligt eller muligt Se eksempelvis https://uvm.dk/aktuelt/nyheder/uvm/stat/2016/161220%20nye%20tal%20for%20gymnasiernes%20loefteevne
[32] Matematikudredningen (2015) s. 49
[33] I Dialogforumprojektet bragte vi et citat fra en deltager i forbindelse med et oplæg om brug af matematik i fysik ved internatet januar 2013. *Jo mere jeg forsøger at lære mine elever, desto dårligere klarer de sig til eksamen*
[34] Matematikudredningen (2015) s.14
[35] Ibid.: s. 63

mellem relevant teoretisk baggrundsviden (herunder ikke mindst matematikfaglig viden) og de praktiske opgaver og udfordringer som matematiklærere løser i den daglige undervisning.[36]

Sidste halvdel af citatet giver håb for matematikfaget[37], og er i overensstemmelse med vores oplevelser på CMU. Gennem projektet *har* vi været i kontakt med mange engagerede lærere med ambitioner om at give eleverne mere end sten for brød, parate til at afprøve nye veje med interessante og opfindsomme ideer vedrørende undervisning med forskellige CAS-værktøjer.

Udgangspunktet for den oprindelige projektansøgning var en ide om, at der blandt lærerne ville være en del, der ville være med til at udvikle matematikfaget parallelt med en udvikling af egen undervisning. Vi så det som en vigtig opgave at styrke input nedefra - både i efteruddannelse og i udvikling af undervisningsfaget. På den baggrund anså vi tilbuddet om at gennemføre et CMU-projekt så attraktivt, at lærere på eget initiativ ville søge om deltagelse, men helt så nemt gik det ikke. Noget af forklaring kan måske findes i de nævnte udfordringer for efteruddannelse.

Der er to dimensioner i CMU's projektmodel. Dels er den en model der giver indblik i lærernes tilrettelæggelse og gennemførelse af undervisning med CAS, og dels er den en efteruddannelse af lærerne i henhold til den enkelte lærers behov. De to dimensioner behandles i det følgende.

6.2 Inspirationen til CMU's projektmodel som en model for efteruddannelse

Grundlæggende søger vi med CMU's projektmodel at trække på lærerressourcer[38] der kan bidrage til at løfte opgaven med at implementere CAS i gymnasieskolen. Modellen havde en række inspirationskilder; den reflekterede praktikker og lærerprofessionalisering (Dale, 2008), samt ikke mindst aktionsforskning hvor afsættet er den enkelte lærers erfaringer og undersøgelser.

Synspunktet var at den enkelte lærer navigerer i et felt mellem fag – forstået som vidensområde præsenteret i en institutionel ramme, klasse – dvs. såvel en sammensætning af en gruppe af elever, såvel som den enkelte elev og læreren selv – dvs. som fag(didaktisk)person. Alle disse aspekter får en ekstra dimension når digitale værktøjer som CAS er på spil. Hvis dette er en tilnærmelsesvis rammende beskrivelse er der ikke baggrund for at kalde "best praxis" frem – dertil er

[36] Ibid.: s. 63-64
[37] En vigtig forudsætning ligger i passus om *rammerne for matematikundervisningen justeres,*
[38] Hvilket ikke skal forveksles med at vi udelukkende trækker på meget ressourcefulde lærere.

undervisningssituationerne for komplekse og for diverse og dermed er overførelsværdien fra den enkelte lærers praksis minimal. Den gennemførte praksis *er* den bedste i situationen, idet den er båret af lærerens rationelle respons på de givne vilkår, hvor læreren ses som besiddende den højeste autoritet mht. adækvate aktioner. Det man skal lære noget af såvel kollegialt som på forskningsniveau er hvordan denne praksis ser ud. Lærerens erfaringer gøres til genstand for refleksion og formidling, hvor coachen er deltager i processen. Coachen har her to overordnede roller – dels at sikre projektets gennemførelse i overensstemmelse med SSS-modellen og dels at understøtte processen i forhold til de ønsker som projektdeltageren måtte have. Som center står CMU for at erfaringerne medieres og almengøres.

Curtis Center på UCLA med en bred vifte af aktiviteter og forbindelser til alle dele af det amerikanske uddannelsessystem var en inspiration ved dannelsen af CMU. På den lange bane vil vi gerne opbygge et praksisfællesskab (community) hvor man på tværs af skoler systematisk deler erfaring og udvikler undervisning - et praksisfællesskab der også involverer matematikuddannelser og aftagere. Men det kræver ressourcer. I forbindelse med de to tidligere projekter for hhv. UVM og Dialogforum etableredes et samarbejde med en række gymnasieskoler i hovedstadsområdet – først en håndfuld med i NØRD-samarbejdet og sidenhen udvidet til at omfatte 3 yderligere inklusiv et HTX-gymnasium. Så etablering af CMU som et center lå i forlængelse af det samarbejde der var i de forskellige konsortier dannet i forbindelse med tidligere projekter.

6.3 Hvad har vi lært – hvilke spørgsmål rejser det?

Interview med lærerne (med udgangspunkt i projekterne) det første år, observationer af undervisning og elevinterview det andet år samt interviewene om lærernes valg det sidste år har givet en viden der vedrører matematikkens vej til undervisningslokalet. Lærerinterviewene var med til at sætte standarder for refleksionsniveauet de efterfølgende år som coachene kunne mplementere. Vi kan også betone betydningen af at fremlægge og diskutere undervisning for kolleger – og at netop coaching gør at deltagerne kommer til at få en stemme, så det ikke kun er de, som er vant til at blive hørt, der taler og at det ikke nødvendigvis er de store og ambitiøse projekter, der ligger mest indsigt i. På den baggrund kan vi roligt sige at vores efteruddannelsesmodel har virket udviklende på fag og deltagere.

Behovet for efteruddannelse med et fokus på udvikling af kompetencer i at tilrettelægge undervisning vurderes af CMU-projektdeltagerne som stort[39]. Herunder hører også lærerens tilegnelsen af mere specifikke kompetencer i egen brug af CAS, samt hvornår og hvordan CAS bruges/ikke bruges undervisningen. Mere overordnet afhænger succes med CAS i matematik af, at det sættes i spil af lærere med kompetencer i at udvikle, gennemføre og evaluere forløb med CAS. Fanget i et valg mellem effektivitet[40] og produktivitet[41] prioriterer mange gymnasier ikke faglig efteruddannelse særlig højt. Matematiklærere anses for fagligt[42] og didaktisk[43] kompetente alene i kraft af deres uddannelse på universitet og det efterfølgende etårige pædagogikum. Der er måske mere forståelse i skoleledelserne for efteruddannelse i selve værktøjet, eller hvis nye faglige emner implementeres. Problemet er så: **Hvordan synliggør vi, at der er behov for løbende efteruddannelse af matematiklærere?**

Coaching er en hjørnesten i vores efteruddannelsesmodel og vurderes af CMU-projektdeltagerne som meget frugtbar i forhold til understøttelse af deres egen udvikling. Samtidigt har coaching bidraget til en meget høj gennemførelsesrate i form af afsluttede og afrapporterede projekter. Coaching er i høj grad møntet på den enkelte deltagers behov og ønsker og er i CMU's model udpræget tænkt i et 'bottom-up' perspektiv, hvor der lægges vægt på læreren som 'den reflekterende praktiker'. Modellen kan fremstå som elitær (den henvender sig til lærere der gerne vil udvikle sig med CAS) og den kan også fremstå som dyr (individuel coaching). Videndeling af refleksioner over forløb er måske mindre oplagt end deling af (eksemplariske) forløb, som kan modificeres og overtages. Dette rejser spørgsmål: **Hvordan vi udbreder/skaber et kollegialt fællesskab af lærere med fokus på udvikling?**

7. CAS og Matematik

7.0 CMU og historien om CAS i det danske gymnasium

[39] Se eksempelvis også Matematikudredningen s. 61; *Hvis lærerne helt frit kunne vælge efteruddannelse ville 51% på kursus i "konkrete idéer til matematikundervisning i praksis".* Dette skal formentlig forstås mere styret end i CMU's model.

[40] Forstået som uddannelsen af flest mulige studenter med så høje karakterer som muligt

[41] Forstået som uddannelsen af studenter med kompetencer, der har samfundsmæssig værdi, dvs. kompetencer, der efterspørges på videregående uddannelser og af erhverv.

[42] Dette til trods for at matematikudredningen peger på at billedet er noget mere mudret, jf. s. 58.

[43] Billedet i matematikudredningen jf. s. 59 er her mere klart. Didaktisk indgår ikke som en eksplicit parameter i bedømmelsen. Lærerne vurderes ud fra en række andre parametre; elev- og forældretilfredshed, elevernes eksamensresultater og kollegialt samarbejde. Ledelsens faglige samtaler (der formodes også at omhandle undervisningen) tager deres udgangspunkt i observation af konkrete undervisning.

Som beskrevet ovenfor har CMU en konkret historie ift. hvordan CAS fandt vej til de danske gymnasier i slutningen af 00'erne (og begyndelsen af 10'erne). Forud for brug af CAS i gymnasiet lå der dansk og internationalt arbejde, der så CAS som en nødvendig men også positiv udvikling i matematikundervisningen. Nødvendig fordi CAS spillede og fortsat ville spille en rolle i professionel matematik og dermed for hvordan matematik så ud f.eks. på videregående uddannelser. Ønskelig fordi der med CAS blev nye muligheder i matematikundervisningen. Ikke sådan at der ventede en rosenrød fremtid, men at en udvikling med mere CAS i 10 – 12 skoleår var en god ting: *We did not find such a "Holy Land" when working with CAS, not for the pupils and not for the teachers, but an interesting learning environment for a*

• *More meaningful,*

• *More interesting,*

• *And more future oriented mathematics education.*

(Böhm, Forbes , Herweyers , Hugelshofer , & Schomacker , 2004, s. 12)

CAS i gymnasiet blev på det tidspunkt forstået som TI 89 (evt. TI 92) som var blevet introduceret efter de grafiske lommeregnere netop havde vundet meget bred indpasning på bekostning af de tidlige computerprogrammer. Brugen af håndholdte apparater var en klar undervisningsmæssig fordel – man undgik at skulle i særlige lokaler, eleverne kunne bruge lommeregnerne hjemme –og de grafiske faciliteter var nemme at gå til. Den håndholdte CAS-regner sås som en naturlig forlængelse af graflommeregneren - om end man på videregående uddannelser allerede mere så CAS på egentlige computere med noget andre arbejdsformer (og anden software).

Bag den positive tilgang til CAS lå dansk og international forsøgsundervisning, som bl.a. havde vist at CAS ikke svækkede (men måske for nogle ligefrem styrkede) arbejdet med papir og blyant (forudsat at det var tilrettelagt fornuftigt) – og at det omvendt gav muligheder for de algebraisk svage elever at se andre sider af matematik. Det blev bl.a. muligt at inddrage mere realistiske data, og man kunne i højere grad fokusere på begreber og hvad løsningerne udtrykte frem for primært at fokusere på løsningsrutiner; "*Most teachers agree that fluency with symbolic manipulation is vital for progress in mathematics. Indeed, it is this very fluency, which provides access to general cases and exact solutions. What is less in agreement is the degree of fluency and thus emphasis given to this within the curriculum. A person fluent with a particular algebraic concept or principle has three distinctive and defining characteristics:*

• *They can decide when it might be useful to use this concept or principle;*

• *They have the symbolic skills to do it correctly;*

• *They know what the significance of the end product is.*

We suggest that too much time has been spent traditionally on the second of these and too little time on the first and last." (Kissane, Kemp, & Bradley, 1997) her taget fra (Böhm, Forbes , Herweyers , Hugelshofer , & Schomacker , 2004, s. 12 - 13)

Og; "*Weak students are those who also have difficulty with process skills. However, before the use of CAS the same students must have been frustrated because many of them didn't like training of skills. Rearrangement of terms for example, often prior to the need, made no sense to them. On the other hand, use of CAS provides many opportunities for weaker students to show their creative side, to involve themselves in discussion about the mathematics, and to find more ways to express themselves*." (ibid., s. 124)

Som nævnt var der bag ovenstående positive syn på CAS en vis empirisk belæg i form af forsøgsundervisning og evaluering i en række lande. Danmark var med her, idet det var muligt – allerede før 2005 reformen - at lade eleverne gå til eksamen med en CAS lommeregner. Mere grundlæggende didaktiske overvejelser var der naturligvis også tale om. 90'erne (og begyndelsen af 00'erne) var præget af en konstruktivistisk tilgang – ikke mindst proces-struktur dualismen fra Anne Sfard[44] der har et fokus på, at det centrale problem i meget matematikundervisning er hvordan man kommer fra processuel forståelse til mere strukturel forståelse. Parallelt hermed kom som en slags alternativ en "concepts first" bestræbelse som prøver at sætte begreberne lidt forud for processerne – og at det netop muliggøres af den nye teknologi.

Denne didaktiske tilgang er bl.a. præsenteret af Keith Nabb (Mona 2016-3 2016)[45] og diskuteret i en efterfølgende kommentar (Bang & Larsen, Matematik som struktureringsmiddel i undervisning med CAS, 2016). En af vinklerne heri er en beskrivelse af forskellige tilgange til værktøjet, hvor blandt andet blackbokse (eksempelvis regression eller χ^2-test) nævnes som en fare (som man dog kan undvige ved at "lukke op" på forskellig vis), mens computerens umiddelbare svar (f.eks. ved at vise de fejl eleven har begået.) betegnes som whitebokse der kan hjælpe til at lære.

[44] Anna Sfard var ikke den eneste aktør, men en af de mest kendte herhjemme – bl.a. med (Sfard, 1991) I (Tall, 2013) påvises lighederne mellem flere af de beslægtede synspunkter.

[45] Monaartiklen er en dansk oversættelse af den originale fra 2009, der kan findes som (Nabb, 2010).

Der bliver peget på lærerens beredskab (kompetence) til at udnytte de mange nye muligheder bl.a. fordi CAS værktøjerne kan give tilbagemeldinger som eleverne ikke umiddelbart kan fortolke. For at læreren kan hjælpe her, fordres kendskab til redskabet, den underliggende matematik og ikke mindst til elevens tankegang og fremgangsmåde.

Gymnasiereformen I 2005 tog det optimistiske CAS syn ind og pegede på arbejdet med IT som en vigtig del af begrebstilegnelsen

- *CAS-værktøjer skal ikke blot udnyttes til at udføre de mere komplicerede symbolske regninger, men også understøtte færdighedsindlæring og matematisk begrebsdannelse.*

og

- *Gennem en eksperimenterende tilgang til matematiske emner, problemstillinger og opgaver skal elevernes matematiske begrebsapparat og innovative evner udvikles.*

I bekendtgørelsen anes det måske allerede at udviklingen, der i slutningen af 00'erne var hurtig på det teknologiske område, ville gå i retning af software og computere frem for håndholdte apparater. Allerede omkring 2008 blev det således for forfatterne til denne rapport klart at man måtte man satse på CAS implementeret på PC. Vi valgte at tage bestik af DTU og andre universiteters arbejdede med Maple og kunne på den måde trække på deres erfaringer i vores efteruddannelse. Andre valgte TI-Nspire som først lidt senere blev til en fuld PC-baseret løsning – senere er der kommet flere platforme til, Geogebra er blevet udvidet med en CAS del og også Word-Mat tilbyder CAS med opgaveløsninger.

Hvor stærkt det er gået kan illustreres af hvordan Maple fandt vej til vores eget gymnasium: Første gang (2008) vi på skolen fremlagde, at vi ville gå den vej – var der visse betænkeligheder fra skolens ledelse; "Vi kan jo ikke bede elever om at medbringe egen PC". Det blev præciseret, at vi kun krævede det i studieretninger med mat A, men kort efter (2009/10) også B niveau. Allerede i 2011/2012 var dagsordenen at computere skulle bruges i alle fag - næsten hele tiden. Et par år efter blev en af de pædagogiske dagsordner, hvordan kan man få slukket for computeren igen - noget af tiden i hvert fald.

Denne udvikling er lidt unik for Danmark. De fleste andre lande har ikke på samme måde set den mulighed, at eleverne medbringer egne computere (og det er jo også privat set meget dyrt) og har måttet vælge andre løsninger – der ofte indebærer mindre CAS brug.

Baggrunden for oprettelsen af CMU i 2013/14 var som beskrevet tidligere - en bekymring om, at den udstrakte brug af CAS-værktøjer ikke var modsvaret af udvikling af undervisningsforløb, nye typer aktiviteter og opgaver samt en didaktisk efteruddannelse af lærere. Mere grundlæggende skulle forholdet mellem matematik og CAS underkastes en revurdering i lyset af CAS-værktøjernes slagkraft.
Konkret[46] var nogle af de bekymringer der viste sig:

- Forbindelsen CAS - matematik - ikke mindst behandling/forståelsen af de reelle tal (dog ikke kun). CAS værktøjet er fundamentalt set en (meget finkornet) repræsentation af de rationale tal kombineret med nogle ”skuffer” til udvalgte eksakte reelle tal. Men værktøjet har også med en funktionalitet som ”lim” muligheder for både at vise og tilsløre hvordan man udfører grænseovergange.[47]
- Blackbokse. Med CAS følger ofte muligheder for brug af forskellige blackbokse. Naturligvis kan også regneark som Excel lave regressioner, men med CAS bliver mulighederne mangedoblede. Eksempelvis muligheder for at løse flere ligninger med flere ubekendte - selvom man ikke kender til teorien bag, muligheder for at finde stamfunktioner - selvom man ikke kender den metode der bruges, brug af inverse funktioner som man ikke har undersøgt. Nogle gange kommer man så ud for at programmet leverer uventede resultater, som man så som lærer enten skal vælge at udnytte til ny indsigt, eller andre gange blot vælge at lukke ned for.
- CAS som hjælp til løsning af traditionelle opgaver, der så med CAS trivialiseres – enten ved at man med en minimal indsats kan løse opgaverne umiddelbart, eller ved at bruge præfabrikerede skabeloner. Forskellige trekantsolvere og apps er eksempler herpå, men mange andre færdige ark som lærere udarbejder kan tømme opgaverne for udfordringer.
- Helt overordnet er der spørgsmålet om, hvilken brug - eller ikke-brug - af CAS inden for matematiske emneområder i gymnasiet, der på relevant måde peger fremad mod videregående uddannelse - eller blot mod næste forløb inden for gymnasiet selv.

[46] Konkretiseringen vedrører de almene betragtninger sidste i afsnit 6.0
[47] Se f.eks. http://www.math.ku.dk/formidling/moed-math/oplaegholdere-15/CARLWINSLOWMoedMathNov15.pdfb

- En anden type bekymring er, at indførelsen af CAS i matematikundervisningen skete på et tidspunkt hvor der var mange nye skolepolitiske tiltag. Dagsordener om at vi skal giv flere mere og bedre matematik, men også om at karakterer i matematik spiller en stor rolle for muligheder for optagelse på videregående uddannelse. Nye pædagogiske udfordringer for lærerne bl.a. i kraft af det almene gymnasium rekrutterer bredere[48]. Dette kombineret med at mange elevers forudsætninger fra folkeskolen opleves utilstrækkelige ift. en gymnasiale undervisning gør at CAS får mange andre roller end blot at udvide mulighederne i undervisningen.
-

Problemet er også, at selvom der naturligvis er mange muligheder for mere undersøgende tilgange, er eleverne allerede vænnet til at computere og nettet bruges til at reducere arbejdsprocesser. Matematik software kommer derfor til at indgå i en kontekst, hvor man kan dele sine opgaver, hvor man kan søge efter løsninger på nettet og hvor det at man lærer noget overskygges af at man har et præsentabelt produkt.

Bekymringen om behovet for en bedre fundering af CAS i gymnasiet er ikke kun et CMU anliggende. Det går igen i Matematikudredningen hvor vi blot vil bringe et enkelt citat om elevernes tilgang til værktøjet (Jessen, Holm, & Winsløw, 2015, s. 25)

”Elevernes generelle løsningsstrategi for en aflevering med opgaver, der ligner eksamensopgaverne, er: at åbne deres matematikværktøjsprogram, skrive den første opgaves tekst ind, og finde det der skal beregnes eller løses (”solves”). For de fleste elever gælder det, at opgaverne ligner andre opgaver de har regnet før, så de blot skal huske, hvordan de løste dem. ”

Også internationalt har der været bekymringer:

Despite considerable investments in computers, internet connections and software for educational use, there is little solid evidence that greater computer use among students leads to better scores in mathematics and reading.

(OECD, 2015, s. 145)

7.1 CMU’s tilgang

Vi har i CMU fra starten ikke haft en bestemt didaktik for øje, blot en stærk opmærksomhed på at det ”handler om matematik”. Heri har ligget, at det overordnet ikke blot handler om ny teknologi, men om det specielle samspil der er mellem matematik og matematisk software. Vi har undervejs i

[48] En nærmere beskrivelse findes ovenfor i afsnit 6.1

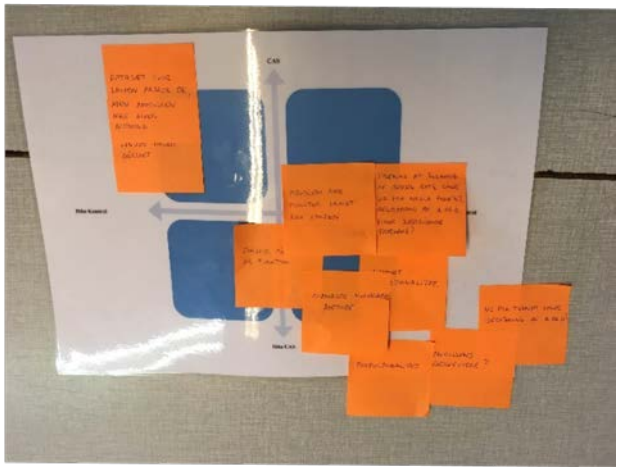
processen ladet os inspirere af forskellige tilgange som har været præsenteret for og diskuteret med vores coaches og projektdeltagere. Tilgangene tjener også som en slags ramme for den korte præsentation af enkelte CMU projekter der følger.

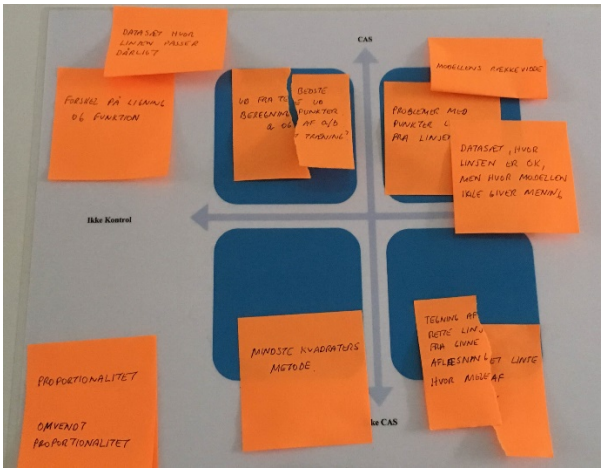
- Den tyske tradition for stofdidaktik, hvor man underkaster det valgte emne en analyse der bl.a. inddrager de undervisningsmæssigt matematiske overvejelser ved tilrettelæggelsen af forløb – (kendte eller forestillede fagligt svære problemstillinger, hvad vil differentiere elever, hvilke forudsætninger kræves) (Straesser, 2014)
- Den hollandske tradition fra Freudenthal Instituttet hvor der er et fokus på hhv. horisontale og vertikale udfoldninger af matematik (Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2014).
  I den horisontale udfoldning bruges matematiske tilgange til at organisere og løse problemer som er forankret i matematisk righoldige situationer om hvilke eleven formodes at have gode forestillinger der kan danne udgangspunkt for det matematiske arbejde, dvs. at gå fra ’virkeligheden’ til matematikkens verden. ’Virkeligheden’ refererer ikke til autenticitet i en fysisk verden, men til hvad eleven kan ´se for sig’, herunder evt. forbinde med sine hidtidige matematikerfaringer og -beredskab. I den vertikale udfoldning handler processen om reorganisering inden for matematikken selv, sammenhænge mellem begreber og strategier, abstraktion, m.v. Dette skal bl.a. sikre at den faglige progression bliver en stedse sammenhængende udvidelse af elevens matematiske potentiale. De to tilgange hænger nøje sammen og tildeles lige betydningsvægt.
- Vi har også været inspireret af den franske matematikdidaktiker Y. Chevallards Anthropological Theory of the Didactic (Chevallard & Sensevy, 2014).
  I denne anskues læring som resultatet af målrettede aktiviteter, en diskurs af aktiviteternes fremgangsmåder og en diskurs om indlejringen af dette i matematiks teoridannelser. Et eksempel kunne være ekstremumsbestemmelser for visse funktionstyper, en fremgangsmåde til bestemmelse af eventuelle ekstremaværdier, en forklaring på hvordan fremgangsmåden giver svar på ekstremumsproblemet, og på hvorfor - fx ved indlejring i teorien for differentiable funktioner. Læreren kan ses som en slags virksomhedsleder i forhold til læringsproduktion og må træffe strategiske valg om fremgangsmåderne: hvordan ’produceres’ det bedste læringsudbytte? Sådanne valg indbefatter en fortolkning af ’bedst læringsudbytte’, overvejelser om de omstændigheder det lærte skal fungere i osv.
  Den fundamentale strategiske overvejelse drejer sig om *valget af fremgangsmåder* til opnåelse af de mål som aktiviteterne retter sig mod. Nogle fremgangsmåder vil være på de

lærendes ’hjemmebane’. Hermed menes at elevernes resurser giver dem kontrol over de målrettede aktiviteter. De kan fx være i gang med at tilegne sig/benytte nye løsningsmetoder som ligger i forlængelse af kendte og som derfor kan kontrolleres af allerede opnået indsigt og kompetence. Andre kan være på ’udebane’. Dette betyder at man har afgivet kontrol af den målrettede aktivitet, fx ved at benytte en formel, hvis udledning man ikke kender eller forstår. Man er i stand til at bruge formlen, men ikke at kontrollere anvendelsens gyldighed. Hvis en målrettet aktivitet er på hjemmebane, kalder vi det *insourcing*. Er den på udebane, kalder vi det *outsourcing*. Denne betragtningsmåde er udviklet af CMU (Bang, Grønbæk, & Larsen, 2016). I sin tilrettelæggelse af undervisningen træffer læreren beslutning om insourcing eller outsourcing. Det er vigtig at pointere at overvejelsen er *strategisk.* Det giver ingen mening at tale om gode eller dårlige valg uden at inddrage, hvad der tilstræbes med undervisningen.

Out-/insourcing beslutninger er af generel natur, men af særlig betydning i forbindelse med anvendelse af CAS. Næsten alt kan CAS-outsources, meget skal outsources, men hvad der anskues som fagets kerneaktiviteter, skal insources (evt. CAS-insources til rutiner som man kan kontrollere). I ’anskues’ ligger at ’kerne’ ikke kan henvises en gang for alle til ’fagets natur’ eller lignende idealforestillinger. Men hvis en aktivitet forbliver outsourcet, vil den ophøre med at være en kerneaktivitet. En gang var hovedregning en matematisk kerneaktivitet. Anskuelsen var at uden hovedregning fik man ikke en dybere forståelse for talbegrebet og de aritmetiske operationer (og på længere sigt af hvad matematik egentlig går ud på).

In-/outsourcing af CAS-teknikker er omfattende og afgørende for den enkelte lærers planlægning af undervisningsforløb (også på den lange bane – hvornår introducerer man CAS, hvilke rutiner skal eleverne have fuld kontrol over, hvilke kan man blot bruge). I de første CMU-projekter var tilgangen ofte ”først regner man uden CAS” og så når man kan det, bruger man redskabet, men undervejs har vi set mange forskellige valg af ”med og uden CAS” ofte begrundet i elevernes niveau, men også af den enkelte lærers tilgang til stoffet. Vi har i den forbindelse grundigt interviewet et antal lærere med henblik på at kortlægge de valg de foretager i forhold til CAS/ikke-CAS brug og i hvor høj grad eleverne skal have indsigt/kontrol over matematiske arbejdsgange. Det kan vise sig i den enkelte time hvor der skal foretages valg mellem at åbne op for mere kontrol over opgaverne eller hvor det måske er mere hensigtsmæssigt at ”lukke ned” og så blot fokusere på at lade programmet løse opgaven. Der er også aspekter af differentiering på elev siden.





Billederne ovenfor viser en konkret brug af out- og insourcing – hvor lærere er blevet bedt om at tage stilling tilde valg de foretager ved tilrettelæggelsen af et bestemt ende – hvad skal være med CAS og hvad uden (lodret akse) og i hvor høj grad ska eleven have kontrol med arbejdet (vandret akse) – her ses to forskellige læreres placering af emner og arbejdsformer inden for lineære funktioner.

I den forbindelse har vi særligt i det sidste års projekter både hos os selv og hos deltagerne været opmærksomme på det man kalder *Instrumentel genese* (Trouche, 2014). I matematik kan det eks. betegne hvordan et produkt som en computer og et computerprogram bliver til instrument (for læreren og for eleven). Det har to forbundne sider. På den ene side er der hvordan instrumentet sættes i spil/bruges - instrumentering. Det kan være visualiseringer, animationer, simuleringer ligningsløsning osv. Den anden side –instrumentalisering- handler om tilegnelse af instrumentets arbejdsmåde. Det vedrører f.eks. elevernes (og lærernes) beherskelse af kommandoer, semantik osv. i softwaren – herunder også detaljer som gør at man kan justere plot, ændre input i en model osv. Instrumentalisering er vigtigt for, at elever f.eks. kan arbejde udforskende og undersøgende. Problemstillingen heri er, at der dermed også skal bruges tid på at lære/træne brugen af programmet. Det er lidt i kontrast til formuleringer i lærebøger der blot ser CAS som et alment værktøj. Det kan f.eks. begrunde at man fremfor at stræbe mod avanceret CAS brug med kommandoer som læreren (eller andre) introducerer og som eleverne ikke selv kan anvende undersøgende fokuserer på grundig beherskelse af mere elementære ting eller at man bevidst tilrettelægger introduktion af nye CAS rutiner på en måde så selve så eleverne selv arbejder med dem (også ud over den snævre ramme man måske skulle bruge rutinen til.

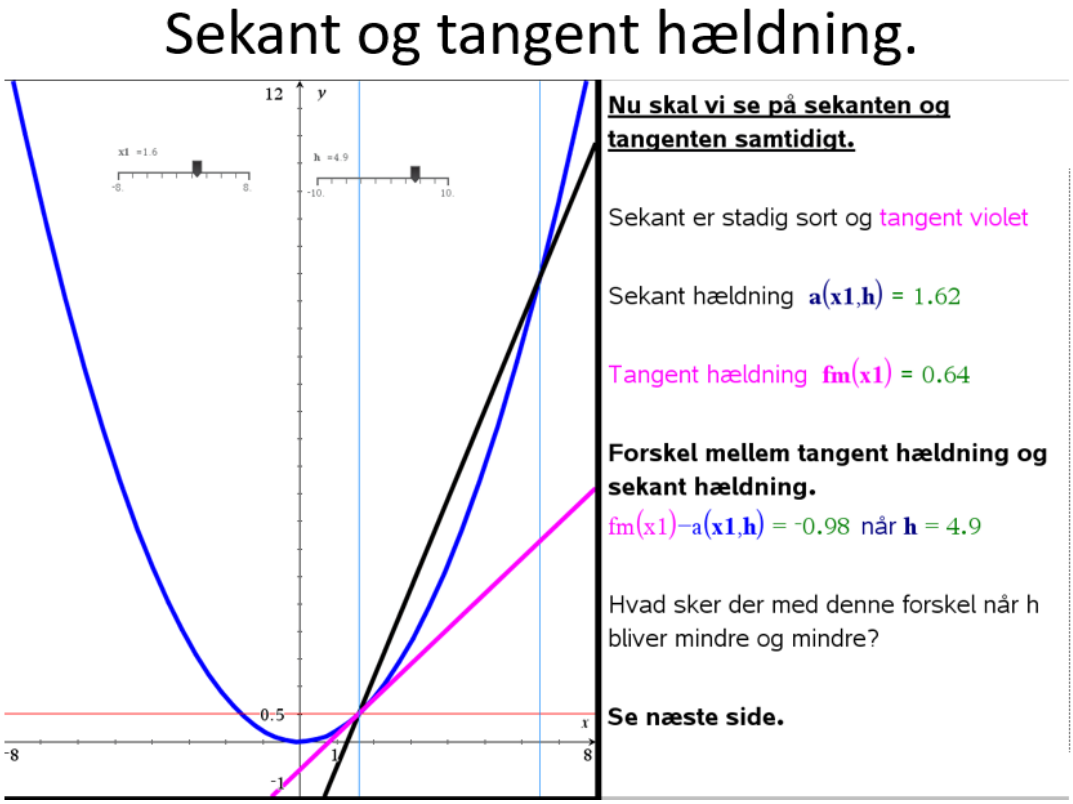
Vi har på CMU haft mange andre vinkler og tilgange. Det afspejler en fortløbende proces hvor vi med udgangspunkt i de faktisk gennemførte projekter har diskuteret og udviklet vores didaktiske beredskab.

7.2 Perspektiver på CMU projekter

Nedenfor præsenteres eksempler på didaktiske refleksioner som CMU projekter kan give anledning til.

Visualiseringer

En række projekter har handlet om visualiseringer bl.a. ift. til differential- og integralregning. Her vil vi blot kommentere to. Det første er et projekt om tretrinsreglen.[49] Ideen i projektet er at visualisere hvordan opstilling af sekanthældning, og dernæst mindskelse af Δx (h) i forskellige trin får sekanten til at nærme sig tangenten.



Som det ses af billedet består tilgangen i at der er indsat nogle skydere. der gør at man kan vælge det faste punkt (x1) og tilvæksten i x (h). Visualiseringen er lavet i Nspire. Funktionen er $f(x)=x^2$. Sekanten vises og hældningen beregnes.

Projektdeltagerens egen refleksion over forløbet var, at der blev lært meget i den stofdidaktiske analyse der (delvist efterfølgende) blev lavet: *Det mest givende for mig har uden tvivl været at*

[49] Se http://cmu.math.ku.dk/projekter/2015/tretrinsreglen/

indse, hvor megen baggrundsviden det kræver at forstå tretrinsreglen. Selv om eleverne burde have den forventede viden, når reglen gennemgås, ses det desværre ofte, at det ikke er tilfældet.[50]
Den stofdidaktiske tilgang analyserede især de (manglende) forudsætninger en del elever havde; ikke at kunne bestemme hældningen for en ret linje, ikke at kende (eller kunne bruge) kvadratsætningerne, ikke at vide hvad en tangent er, at sekanthældningen (som den udregnes her) er en funktion af to variable og flere andre forhold.

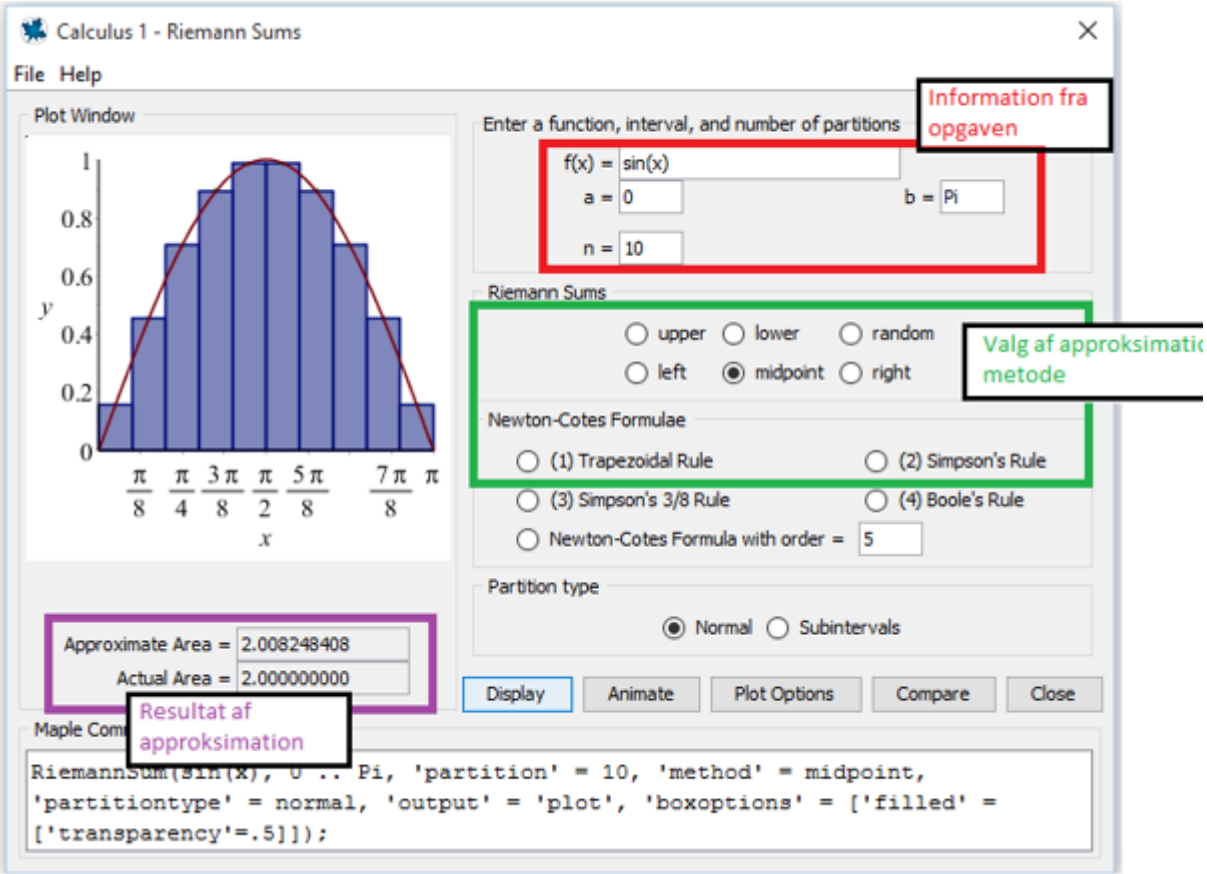
Mens projektet således af projektdeltageren vurderedes positivt som anledning til refleksion var han lidt skuffet over elevernes umiddelbare respons. Ikke at de havde svært ved at betjene arket. Tværtimod – skyderne virkede fint og det gik hurtigt med at se hvad der blev varieret – nærmes for hurtigt. Svaret på hvad der sker med forskellen mellem sekanthældning og tangenthældning når h blev mindre fandt de meget hurtigt. Et ark (og forløb) som læreren havde brugt timer på overstod eleverne på 15 minutter. Og der kom tilsyneladende ikke yderlige forståelse hos eleverne ved det senere mere formelle bevis.

Diskussionerne af projektet på CMU's seminarer (og i et interview med projektdeltageren) var frugtbar. "Slider-fælden" blev det døbt – og kan bruges om det forhold, at læreren planlægger matematisk indhold og får, softwaren til at virke gnidningsløst, men at elevernes arbejde bliver meget kortvarigt og at de ikke selv stiller sig spørgsmål som udfordrer matematikken. Det er et eksempel på en mere almen problematik, der i en anden sammenhæng blev døbt *CAS-fastfood* – umiddelbart appellerende, men uden en varig tilfredsstillelse.

Et af problemerne er naturligvis at selve tangentens hældning her er en form for blackboks, hvor der kan spørges om hvordan programmet egentlig har fundet den (og hvordan kan den findes for vilkårligt x1). På en måde tilsløres grænseovergangen -men det sker selvfølgeligt også i andre tilgange - med og uden CAS. Man kunne også bede eleverne undersøge problemer hvor svaret måske ikke var helt så oplagt. Hvordan ser billedet f.eks. ud hvis man zoomer mere ind, er der en sammenhæng mellem tangentens hældning og x1 placering osv.

Et andet projekt med visualisering omhandlede arealer under grafer.[51] Her udnyttes en færdig app i Maple som eleverne kan arbejde med og bruge undersøgende.

[50] Ibid



Projektet var tænkt i en vertikal udfoldning, idet det var tænkt at pege videre mod areal som stamfunktion. Riemann summer er ikke pensum men peger naturligvis fremad mod videregående uddannelser både ved at være en (ny) illustrering af grænseværdi og ved at introducere numeriske metoder.

Der blev brugt en app med instrumentalisering ift. at kunne indstille (og kommentere) på graferne – selvom denne del voldte visse problemer: *Projektets hovedformål var at give eleverne både en visuel og faglig forståelse for arealbestemmelse vha. grænseværdier af summer, hvilket jeg synes lykkedes. Da vi efterfølgende skulle bevise, at arealfunktionen er en stamfunktion, kunne eleverne meget nemmere forholde sig til, at venstre og højre summen kunne bruges som argumenter, samt forstå den sidste del, hvor grænseværdien bliver udregnet. Netop denne del af beviset kan ellers være svært for nogle elever, men på dette hold gik det godt. Det var dog også et lille 3g. A-niveau hold, hvor eleverne var fagligt stærke*[52].

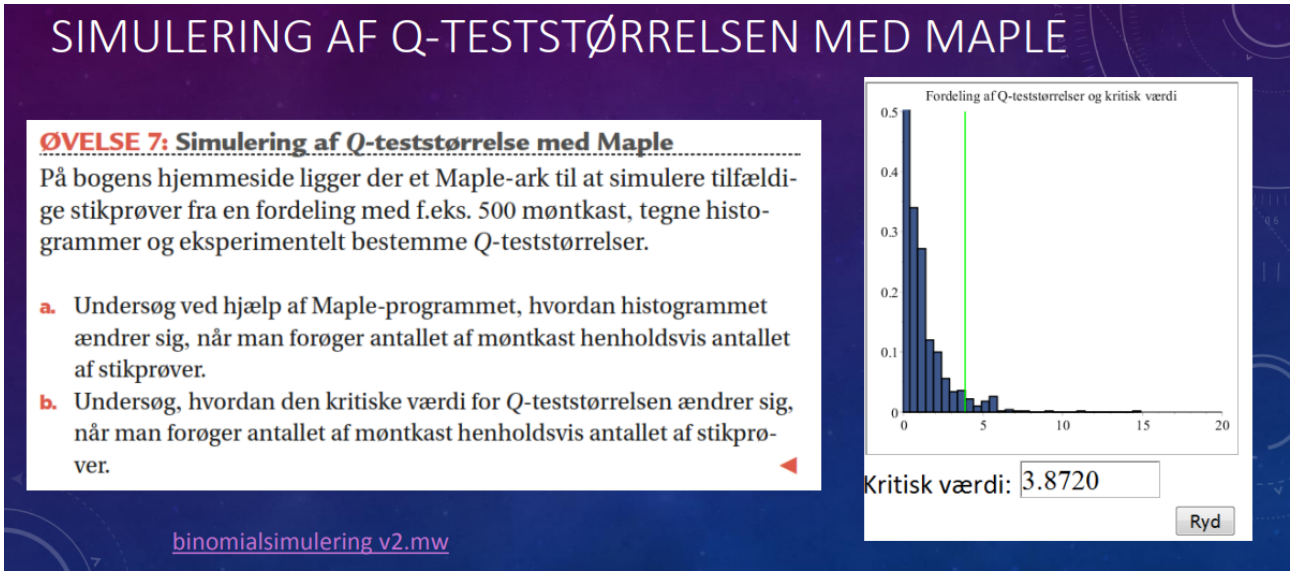
[51] http://cmu.math.ku.dk/projekter/riemanssummer/
[52] Ibid

En vigtig pointe var her at selvom (som det ses på billedet ovenfor) giver det eksakte areal som kan sammenlignes med den approksimerende sum, var der i forløbet insourcet noget mere nemlig funktioner som man ikke umiddelbart har stamfunktioner til og vurdering af fejlen på arealet beregnet uden det tilhørende integral. Det sidste via en (for eleverne) matematisk blackboks (formel).

Man kan ikke sammenligne de to projekter. Det sidste projekt var i en matematik A klasse med få men stærke elever. I en sådan situation er det nemmere at insource avanceret matematik. Det første forløb var en samfundsfaglig klasse til B niveau. Her problemet et helt andet, at der skal findes gode måder at insource mindre avancerede ting som giver mening for eleverne både på kort og lidt længere sigt. Hvor det første projekts har et perspektiv hvor computer skal forkorte læreprocessen – oplever eleverne med Riemannsum snare en udvidelse af læremulighederne.

Simuleringer

En måde at anvende CAS på som kan bruges til at åbne lidt op for blackbokse er at simulere. Det er velegnet til statistik hvor man f.eks. kan få Maple til at simulere stikprøver fra en et antal forsøg med en bestemt basissandsynlighed. Pointen er at man ikke alene kan få en stor stikprøve og at man kan tage den samme stikprøve mange gange. Nedenfor er vist et eksempel med at ”kaste mange mønter mange gange” http://cmu.math.ku.dk/projekter/2015/hypotesetest/ Projektet er lavet i Maple men en tilsvarende ide er også implementeret i Nspire
http://cmu.math.ku.dk/projekter/2015/chi/
Endvidere har simulering indgået i et projekt om Enigma maskinen og kryptering
http://cmu.math.ku.dk/projekter/dasg/begrebsforstaaelse-naerum/kryptering-dekryptering/



Forløbet med X^2 test og Maple viser at simulering kan virke fint til at få en dybere forståelse af de begreber der indgår og at der tilføres nye aktivitetsmuligheder i timerne som supplement til mere teoretiske gennemgange: *Eleverne fik en bedre forståelse for begreberne, specielt p-værdi efter at de havde simuleret det vha. Maple. Teknisk fungerede det bedre end ventet, og kombinationen af praktiske eksperimenter og computersimulering appellerer til forskellige elevtyper. En del af det intenderede forløb (Monte Carlo simulering og de store tals lov) måtte udskydes til 2.g på manglende tid*[53]. Det nævnte forløb er fra en 1g (med A niveau).

I simulering-projekterne er der en del der er outsourcet. Først og fremmest er selve den måde som softwaren udfører simuleringer på gemt væk - dvs. spørgsmålet om hvordan tilfældige tal genereres og hvordan de bruges til at få f.eks. terningkast til at virke, men også spørgsmål om hvordan man konkret via løkker får forsøgene gentaget og optalt enten skjules helt eller er i en kode som eleverne ikke rigtigt skal arbejde med.

Derfor er det naturligvis vigtigt at se på hvad der så insources og som eleverne kan have kontrol over. I dette projekt er det helt afgørende at der ved siden af CAS afprøvningerne (som går temmelig hurtigt – det er fortolkningen der er tidskrævende) er et praktisk taktilt element (møntkast, M&M forsøg, test af Cola typer osv.) som giver en mere konkret fornemmelse hvordan virkelige data skabes, hvordan stikprøver faktisk ser ud, osv.

[53] http://cmu.math.ku.dk/projekter/2015/hypotesetest/

Der er væsentlig forskel på lærerens instrumentalisering og elevernes (læreren skal beherske kommandoerne og løkker i Maple) mens eleverne blot skal betjene arket – finde de steder de selv kan/skal ændre noget osv. Instrumenteringen er også mest lærerens – i form af at levere forklaringer og ideer til arket. Eleverne opnår indsigt ved at bruge programmet men forventes på ingen måde selv at kunne lave undersøgelser. Pointen er i en vis forstand jo også at simuleringen i dette tilfælde jo egentlig blot lægger op til at forstå Chi-i-anden testen, men s når den bruges i opgaveregning ikke kræver det ikke simulering. Oplægget om at tage det videre med Monte Carlo simulering vil i den forbindelse være interessant at se nærmere på.

Anvendelse og modellering

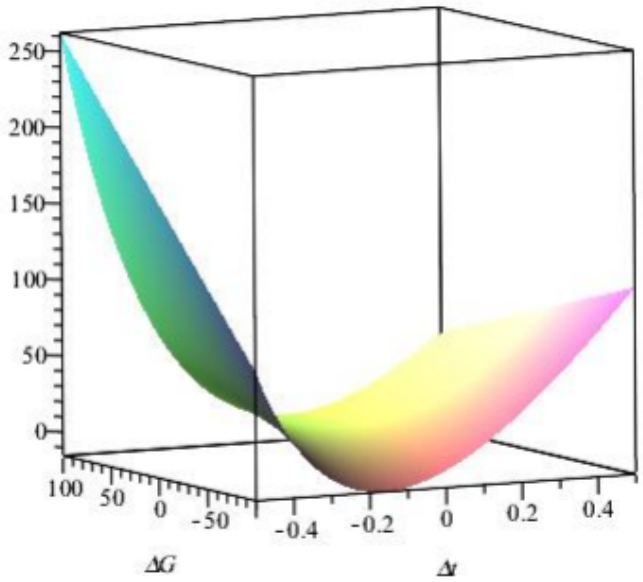
CAS tilgangen har med succes været brugt i projekter, hvor et vigtigt formål har været samarbejdet med andre fag. Det kan motivere matematik i form af virkelighedsnære anvendelser, men omvendt kan man også få vigtige arbejdsmåder ”tilbage” til matematik. Eftersom der i bekendtgørelser lægges meget vægt på anvendelser ikke mindst inden for studieretninger er refleksioner over disse forløb vigtige. Fysik er naturligvis oplagt se f.eks.:
http://cmu.math.ku.dk/projekter/matematisk-modellering-i-fysiksammenhaenge (svingninger, rotation, trigonometriske funktioner) eller
http://cmu.math.ku.dk/projekter/dasg/begrebsforstaaelse-naerum/dobbeltspalten/ (modellering af dobbeltspalte forsøg. Men også andre fag har været på banen. F.eks. indgår historie i
http://cmu.math.ku.dk/projekter/koblede-differentialligninger/ om panserslaget ved Kursk.
Eller samfundsfag i http://cmu.math.ku.dk/projekter/2015/nationaloekonomi/, hvor projektet har handlet om nationaløkonomi.

Det sidstnævnte projekt er lavet i Maple og omhandler bl.a. funktioner af to variable (som jo indgår i de nye læreplaner), hvor der bruges 3D visualisering. Nedenfor er eksempel fra opgavearket:

”Hvorledes ændres BNP og den samlede økonomiske situation som funktion af ændret skattetryk (t) og ændret offentligt forbrug (G)?”.

I skal også lære at læse grafer i 3d.

For at gøre dette skal I arbejde med den Maple skabelon, der er lagt ud i 1. modul tirsdag morgen. Figuren nedenfor er taget fra denne fil:



Projektet blev vurderet positivt af projektdeltageren – der også selv har samfundsfag

Målet var, at eleverne skulle opstille nationalregnskabsligningen samt udlede multiplikatoren rent algebraisk (se Schausen & Damsgaard-Madsen, matsamf side 66 ff.). Herefter skulle de via Maple undersøge, hvilken betydning importkvoten, forbrugskvoten og skattetrykket har for størrelsen af multiplikatoren. Endvidere byggede de modeller i Maple, hvor de henholdsvis undersøgte sammenhængen mellem BNP og ændring af den offentlige sektor samt sammenhængen mellem BNP og ændret skattetryk. Endelig skulle de forholde sig kritisk til deres modellering[54].

Projektet var som nogle af de andre anvendelser meget fokuseret på tolkninger af modellen, og var i høj grad båret af instrumentering frem for instrumentalisering. Ved at tilrettelægge forløbet så eleverne ikke blot benyttede et færdigt ark, men skulle skrive ind fra en PDF fil var der dog en del Maple–medlæring om syntaks, mm., og dermed adressering af instrumentaliseringsdimensionen af den instrumentelle genese.

[54] http://cmu.math.ku.dk/projekter/2015/nationaloekonomi/

Netop fordi anvendelser ofte giver mere avanceret matematik end det man plejer, bliver der let tale om en vertikal udfoldning, men matematikken i dette forløb blev også brugt til at skærpe opmærksomheden om almindelige funktioner og deres ekstrema. CAS var i dette forløb egentlig en forudsætning for overhovedet at kunne bruge matematik i dette aspekt af samfundsfag, og kan måske motivere elever for, at en matematisk vinkel ikke blot er påklistret (som i nogen opgavetyper). På den længere bane kan det måske give anledning til SRP hvor eleverne kan forholde sig mere undersøgende med værktøjet. *Læringsmålene blev overordnet set nået, i matematik fik eleverne en træning i at bygge modeller, hvori der indgår empiriske data samt at ved hjælp af plots at få en forståelse af forskellige sammenhænge. Endvidere fik eleverne en smule erfaring i at arbejde med funktioner af to variable.*[55]

Tilegnelse af software.

Hvis man vil have eleverne til at arbejde mere selvstændigt med undersøgelse af et matematisk problem ved hjælp af software, er en af udfordringerne elevernes tilegnelse af værktøjet – den instrumentelle genese. Det ligger implicit i en række af CMU – projekterne – og er måske et element i dem alle. Men som vi har set i flere af de foregående eksempler har meget af instrumenteringen ligget hos læreren, og besværlig kode eller avancerede kommandoer er holdt delvist skjult for eleverne – der så i højere grad har brugt lærerens forarbejde til at arbejde med matematikken (som tilrettelagt af læreren).

Men hvis man f.eks. vil arbejde mere avanceret med plots eller give eleverne muligheder for selv at arbejde med simuleringer kræves det, at man kommer dybere ned i programmet og både får færdigheder der giver muligheder for mere kontrol med outputtet og indsigt i hvordan forskellige kommandoer fungerer. Der er flere pointer i denne tilgang. For det første kan det være med til at reducere den iboende tendens til at man blot sætter CAS ind som en lettelse af arbejdet – altså at CAS kun bidrager til outsourcing – mens der så insources matematik. Eleverne kan i høj grad være vænnet til denne tilgang til IT fra andre fag, hvor f.eks. nettet letter adgangen til informationer, men omvendt ikke fordrer helt så mange selvstændige overvejelser (i første omgang i hvert fald). For mange elever er CAS en slags stor lommeregner der kan løse opgaver – *solve* erstatter håndregning på samme måde som TI-30 erstatter division eller opløftning i potens. Nogle gange er proceduren

[55] Ibid.

forstået fordi den kan reproduceres uden redskab, andre gange er en procedure blot smart som f.eks. decimaludvikling af kvadratrødder, hvor elever næppe har indblik i hvordan de kunne gøre det selv. For det andet kan der være matematisk indsigt i at kunne beherske programmet. Mere avancerede plot kan belyse funktionssammenhænge, definitions- og værdimængde osv. At bruge Geogebra til at fremstille bestemte tegninger kræver lidt kendskab til konstruktionsgeometris osv.
For det tredje er det et eksempel på mere praktisk matematisk arbejde – man kommer til at begå fejl, korrigere, blære af dem osv. meget kontant endda fordi værktøjet meget hurtigt (umiddelbart efter tastetrykket) viser om det er gjort som man forventede/håbede eller det ser anderledes ud.

I forlængelse af det tredje aspekt kan der i denne mere aktivitetsorienteret tilgang til CAS ligge muligheder for at motivere elever på en anden måde og med mere åbne opgaver end blot at bruge værktøjet til at finde specifikke sammenhænge eller løsninger.
Her er tre eksempler

A. Fit & Fun with Maple - En anderledes introduktion til et CAS-værktøj, hvor første opgave var at lave et kunstværk.

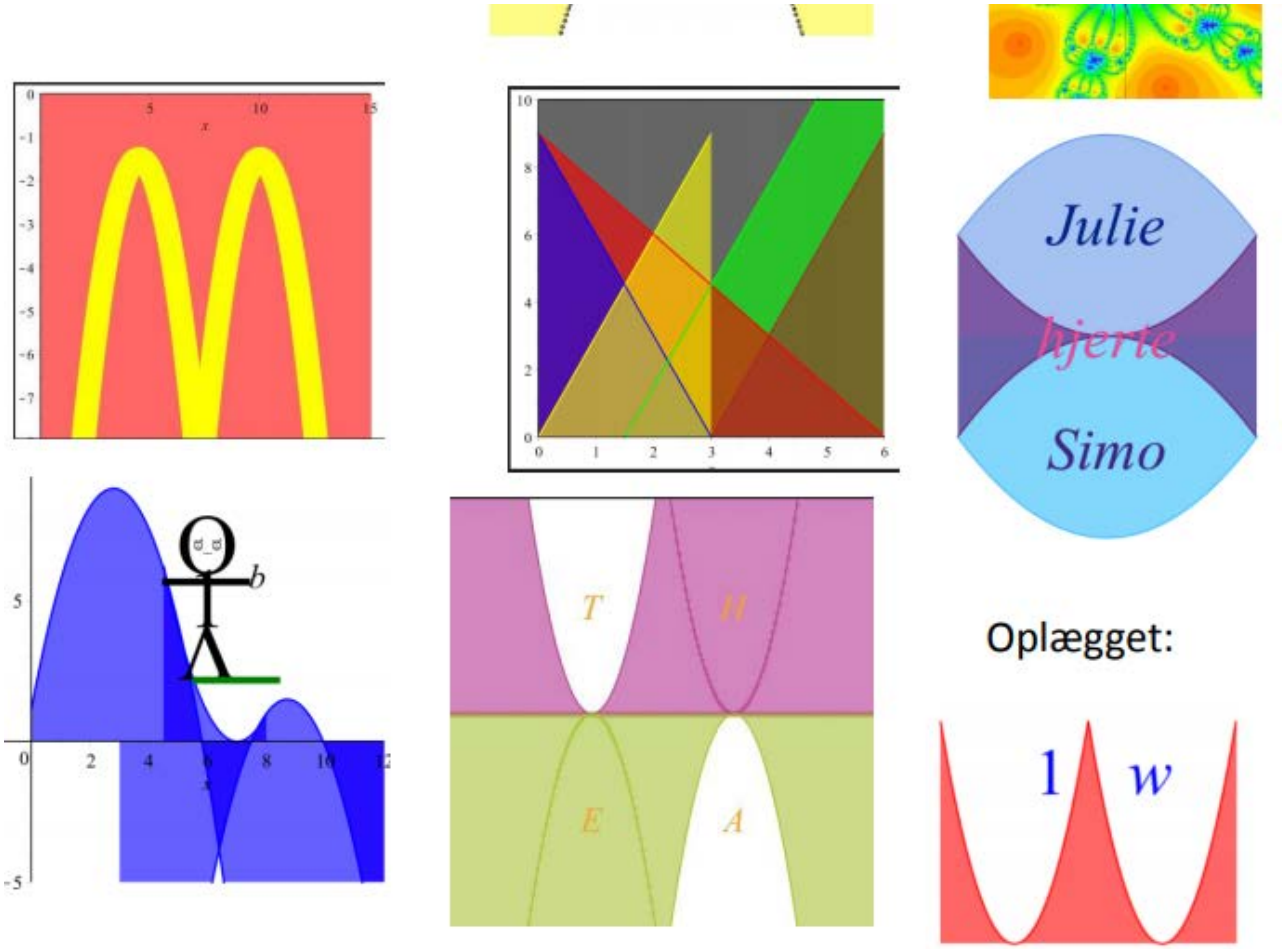
Den overordnede idé for projektet var at præsentere CAS-værktøjet som et mange-facetteret værktøj fremfor blot en avanceret regnemaskine. Klassen var en stx 1g, hvor alle havde Musik A og matematik på mindst B-niveau.

…

Projektet havde to faser: (1) En introduktion til Maple, hvor eleverne skulle konkurrere mod hinanden om at lave det bedste kunstværk, og (2) En konstruktion af et værktøj, der ved hjælp af skydere kunne fitte de tre vækst-sammenhænge til et datasæt. Helt overordnet var det målet, at eleverne i løbet af forløbet skulle blive fortrolige med lister og objekter, for derved bedre at kunne orientere sig i Maples ganske omfattende hjælpefunktion eller hente ideer fra internettet.[56]

Projektet blev fremlagt på CMU's forårsseminar i 2016 og selvom der egentlig ikke er tale om avanceret matematik vakte tilgangen stor opmærksomhed.

[56] http://cmu.math.ku.dk/projekter/fit_fun/



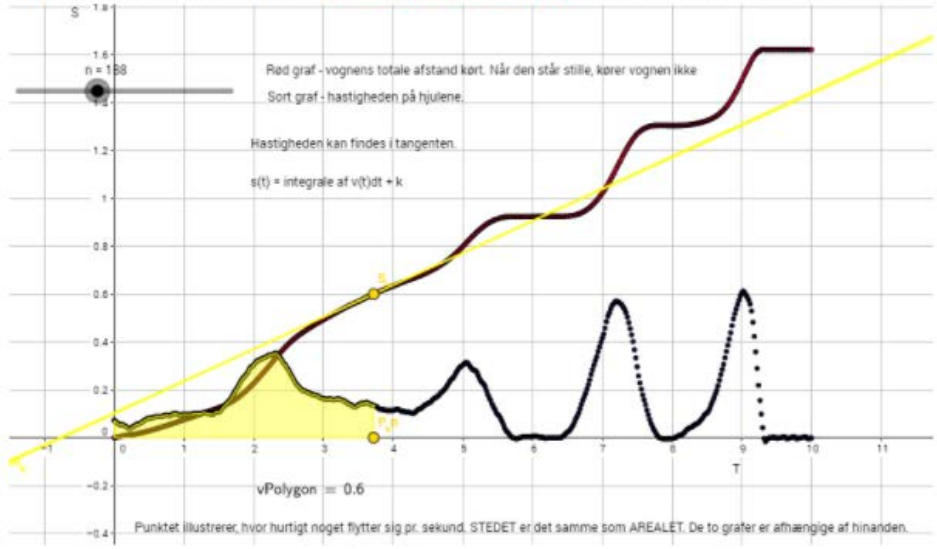
Lærerens oplæg ses nederst i højre hjørne, nogle elevers mere kreative bidrag er vist ovenover.

B. Et andet eksempel – her med Geogebra og arbejde med differential- og integralregning ift. bevægelse ses i: Matematisk modellering i Geogebra – Med specielt fokus på *elevernes* anvendelse af CAS-redskabet

Formålet med projektet er, at eleverne tilegner sig en sådan grad af færdigheder og kompetencer i CAS-redskabet GeoGebra, at de bliver i stand til at udforske matematiske modelleringsproblemer gennem dynamiske konstruktioner. Vi arbejder ud fra en overbevisning om at "det er den, der konstruerer de dynamiske figurer i GeoGebra, der lærer mest".[57]

[57] http://cmu.math.ku.dk/projekter/2017/matematisk-modellering-i-geogebra/

Eksempel på elevarbejde: Geogebra-app for bilen der kører fremad



Projektet havde som det ses på figuren ovenfor bl.a. det formål at fremstille nogle konkrete app's der illustrerer f.eks. sammenhæng mellem hastighed og kørt strækning, men vigtigt var også dokumentationen i form af forklaringer på hvordan konstruktionen er lavet – enten ved at henvise til Geogebras vindue hvor man kan se det, eller ved at eleverne trinvist ved hjælp af videoer viste hvordan den er lavet. Konklusionen på projektet var: *For at eleverne skal kunne opnå forståelse af væsentlige sammenhænge i et givent matematisk problem, skal de mestre konstruktion af relevante statiske og dynamiske figurer. I modellerings- og optimeringsopgaver er konstruktion af dynamiske figurer meget befordrende for forståelsen af problemets karakter og løsning. Derfor er det nødvendigt at fokusere på denne kompetence og træne eleverne i selvstændigt arbejde med konstruktioner i Geogebra. Arbejdet med dynamiske figurer er også med til at afklare og udvikle elevernes forståelse og opfattelse af de matematiske begreber*[58].

C. Et tredje eksempel er: Binomialfordelingen - Med fokus på simuleringer og eksperimentel bestemte sandsynligheder.

Matematisk set lidt det samme som det vi så i simulering i.f.t Chi-i anden test. Her er det blot binomial fordelingen – men fokus er her ikke kun på at lade eleverne afprøve et færdigt ark i Maple: *Det vigtigste fokus i projektet i CMU-regi har været, at tackle forståelsesmæssige udfordringer ved at bruge computeren/Maple som redskab til at foretage simuleringer. I dette tilfælde for at simulere binomiale eksperimenter.*

[58] Ibid

Målet har været at eleverne skulle opnå større indsigt i hvad der er blevet simuleret via større indsigt i hvordan simuleringen blev foretaget. Dvs. et skridt væk fra "blackbox".
I den forbindelse har robusthed i forhold til at bruge en sekvens-kommando, seq(), været i centrum. Kommandoen skulle bruges til at gentage binomialeksperimenterne.[59]

I en vis forstand er dette projekt "nørdet" på den måde at man jo sagtens kan simulere binomial forsøg uden at vide hvordan computeren gør det. Men f.eks. brug af lister og arbejde med sekvenser giver en almen indsigt som måske kan bruges senere hen.

Vi kan lave lister nemt med *seq*( )-kommandoen.

[*seq*(*i*, *i* = 1 ..5)]

[1, 2, 3, 4, 5]

[*seq*(*i*, *i* = 3 ..8)]

[3, 4, 5, 6, 7, 8]

Også lange lister

[*seq*(*i*, *i* = 1 ..100)]

[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100]

meget lange...
Prøv:

[*seq*(*i*, *i* = 1 ..1000)]

Arbejde med seq

Vi kan ændre på listerne

[*seq*(2·*i*, *i* = 1 ..5)]

[2, 4, 6, 8, 10]

Også med funktioner som er defineret uden for *seq*( )
f := *x*→2·*x*
seq(*f*(*i*), *i* = 1 ..10)

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20

Tilgangen med at lære eleverne at arbejde med strukturen i programmet og detaljer er ikke nødvendigvis nem: *3. Endeligt stod det klart i forbindelse med elevernes afsluttende afrapportering, at der alligevel havde sneget sig en blackboks ind. Eleverne havde svært ved at forbinde deres begrænsede faglige viden om stokastiske variabel med den konstruktion, som jeg havde valgt, hvor*
X := RandomVariable(ProbabilityTable([p, 1-p]))
er den variabel, der tages "Sample()"'s fra, da dette X ikke er b(p,n) for n>1[60].

[59] http://cmu.math.ku.dk/projekter/2017/binomialfordelingen/
[60] Ibid

Det lyder måske teknisk – men er netop et eksempel på hvad man som lærer begiver sig ud på når man vil have eleverne dybere ned i værktøjet. Et alternativ (som også nævnes i evalueringen) er måske at bruge Maples *rand* kommando i stedet for

En sidste pointe ved de projekter, hvor et delfokus er elevernes beherskelse af programmet er at de *kan* noget selv med programmet. Modsætningen hertil er eksempelvis anvendelse af færdige skabeloner, hvor det er noget uklart hvad det er egentligt kan (selv).

8. Opsamling

Nærværende rapport er dels en rapport over de 4 år med CMU som IF's, UVM's og MATH's bevilling har muliggjort, men den er også en status. Den viser hvor CMU står nu, hvad vi har erfaret og hvad vi ser der peger fremad. Konklusionerne er selvkritisk reflekterende.

Først og fremmest kan man naturligvis spørge om det udførte arbejde - hvor interessant det end har været for deltagerne- kan sætte sig varige spor og om det når videre udbredelse. I nogle af vores oplæg i starten har vi i spøg inddelt lærere i tre kategorier "tigre, flodheste og elefanter". Vi vil ikke dvæle så meget ved flodhestene. Men tigrene forstået som "initiativrige der bevæger sig gennem junglen på interessant vis", men ikke efterlader sig spor og elefanterne der bevæger sig "langsommere og i flok" og som efterlader massive spor, er måske værd at dvæle ved. Er CMU tiger trænere eller elefantdomptører? Vi har givet haft begge roller. Måske har vi også fået enkelte tigre til at efterlade sig spor. Vi føler selv at vi i en svær tid på gymnasierne, med selveje, økonomisk smalhals og mange andre udfordringer har været med til at holde liv i diskussionen om hvordan CAS kan medvirke til at berige matematikundervisningen.

Vi har gerne villet inddrage lærere fra hele landet men har i praksis haft langt flest lærere fra Region Hovedstaden (med bl.a. Fjerritslev (og Grønland!) som en markant undtagelse). En bredere deltagelse giver logistiske udfordringer men det er vel værd at stræbe efter? Vi har lagt en stor indsats i at få projekterne dokumenteret og gjort delelige via CMU's hjemmeside *og* de deltagende har lært af den proces det er at skulle præsentere projekterne i et bestemt format. Men fra en bredere synsvinkel kan man jo spørge om den måde at videndele på virker og også om hvordan det fungerer på lidt længere sigt.

Vores holdning til brug af CAS i gymnasiet er stadig positiv kritisk – men hele matematikfaget og dermed matematik med CAS er ”fanget” i en bestemt gymnasial kontekst som man ikke kan komme udenom. En af problematikkerne er ”stærke” og ”svage” elever. Er det sådan at dybere forståelse med CAS blot noget vi kan tilbyde stærkere elever, mens CAS for de svagere reelt bliver en opgaveløser og for nogen tilmed blot en yderligere komplikation i undervisningen?
Og i forlængelse heraf hvordan kunne CAS blive en løftestang for ikke så stærke elever?
Vi har et par eksempler på projekter med denne vinkel – men her kunne det være interessant med yderligere undersøgelser. Herunder en belysning af hvordan stilladssering f.eks. med færdige ark osv. virker ift. i stedet at give eleverne mere simpel CAS og dermed også mere kontrol..

Ikke blot CMU har peget på faren for trivialisering af matematik med CAS, fordi CAS tendentielt udhuler værdien af traditionelle opgaver. Det blev tidligere set som et problem ift. evalueringer og der har været foreslået forskellige løsninger. Det er naturligvis mere end det, men alligevel kunne man godt efterspørge gode eksamensopgaver med CAS der understøtter det gode arbejde i undervisningen – er det noget vi i CMU skulle arbejde med?
Der er mange projekter der viser CAS’ potentiale i anvendelser og inden for mere avanceret matematik eller avanceret matematisk tankegang, men har det gang på jorden i gymnasiet hvor elever måske først og fremmest ser matematik som en eksamensmæssig udfordring?

Vi har i over årene set en udvikling i retning af at flere projekter tager tilegnelsen af værktøjet mere alvorlig. Heri ligger et potentiale for at kunne motivere CAS og matematik mere praktisk og måske også mere givende i form af at forstærke elevernes egen-aktivitet - ikke mindst i forhold til det vi tidligere kaldte ”slider fælden”. Men udfordringen set i gymnasiet er jo at vi dermed også kommer til at se på specifikke værktøjer og hvordan de skal forstås og bruges. Gym-pakken i Maple og tilsvarende ark mm. i Nspire er lidt af det modsatte nemlig forsøg på at gøre programmernes overflade mere simpel og spiselig.

En del af vores fokus i diskussioner på coach-seminarer, har været at anlægge forskellige vinkler på matematik-didatik med og uden CAS. Vi har brug for en slags fælles sprog der indfanger læringsvanskeligheder og potentialer. I CMU har vi f.eks. set på ting som ”robust” brug af CAS der dækker over at elever har grundlæggende færdigheder ift. programmerne og f.eks. kan forstå fejlmeddelelser, læse output osv. Men vi har også peget på et aspekt som vi kalder ”kontrol” altså

områder af matematik med CAS hvor eleverne i princippet kan kontrollere hvad der foregår (evt. selv regne efter, selv finde fejl osv.). Vi har i den forbindelse peget på begreber som insourcing og outsourcing til at beskrive nogle af de valg som læreren i den forbindelse må træffe både i den overordene tilrettelæggelse af et forløb men også direkte i undervisningen – med udgangspunkt i hvad han eller hun forestiller sig vil bringe den konkrete elev videre.

Vi er langt fra nået i mål med vores didaktiske refleksioner men behovet for en didaktisk diskussion om CAS og matematik rækker langt bredere ud end deltagerne på CMU's kurser. I den debat er det naturligt at se på en række aspekter (hvoraf CMU allerede er i gang med at adresse nogle):
-er der CAS-forudsætninger som elever fra folkeskolen hensigtsmæssigt kan medbringe når de kommer i gymnasiet (når de nu får CAS værktøjer). Og hvilke? Kan vi udvikle standarder på langs af uddannelsessystemet for hvordan CAS bruges, hvordan man dokumenterer opgaveløsninger osv. så man undgår nogle af de negative effekter som lommeregneren medførte i form af en generel svækkelse af algebra?
-er der tilsvarende vinkler man kan se på ved overgangen til videregående uddannelser, f.eks. blot i retning af hvad det forventes at eleverne skal kunne med og uden CAS.
-er der områder af gymnasiematematikken der skal helt nytænkes i lyset af CAS, eller nye områder der skal erstatte andre. Er *grænseovergange* allerede tyndet så meget ud at man skal gå andre veje i bestemmelse af tangenter eller arealer under kurver. Vi har egentlig ikke set sådanne helt nyskabende projekter i CMU – selvom man givet kan finde inspiration i nogle af projekterne.

Bibliografi

Bang, H., & Larsen, C. (2014). Det tilstræbte matematikindhold og teknologi - spiller det sammen? *MONA*(2), 75-80.

Bang, H., & Larsen, C. (2016). CMU på vej mod år 3 – Hvad har vi lært, hvor vil vi hen? *LMFK-bladet*, s. 3-6.

Bang, H., & Larsen, C. (2016). Matematik som struktureringsmiddel i undervisning med CAS. *MONA*(4), 72-78.

Bang, H., Groenbaek, N., & Larsen, C. (July 2016). *Discussion Groups/Workshops* . Hentet fra ICME 13: http://www.icme13.org/files/abstracts/DG_Groenbaek.pdf

Bang, H., Grønbæk, N., & Larsen, C. (2015). Hvem skal samle handsken op? *Mona*(1), 49-65.

Bang, H., Grønbæk, N., & Larsen, C. (2016). Coaching and engaging. Developing teaching with CAS in High School. Dublin.

Bang, H., Grønbæk, N., & Larsen, C. (2016). Out- and insourcing, an analysis model for use of instrumented techniques. *Proceedings of CERME 10*, 1-8. Dublin: ().

Böhm, J., Forbes , I., Herweyers , G., Hugelshofer , R., & Schomacker , G. (2004). *The Case for CAS.* T^3 Europe. Münster: Westfälische Wilhelms-Universität Münster. Hentet fra http://www.t3europe.eu/fileadmin/t3-europe/Publications/TheCaseforCAS.pdf

Chevallard, J., & Sensevy, G. (2014). Anthropological Approaches in Mathematics Education, French Perspectives. *Encyclopedia of Mathematics Education*. (S. Lerman, Red.) Dordrecht: Springer Science+Business Media. doi:10.1007/978-94-007-4978-8

CMU. (November 2014). *CAS i matematikundervisningen*. Hentet fra Mød MATH på KU - 2014: http://www.math.ku.dk/formidling/moed-math/moed-math-2014/oplaegholdere/CMU_HB.pdf

CMU. (November 2015). *CASmatik eller CASseret?* Hentet fra Mød MATH på Københavns Universitet: http://www.math.ku.dk/formidling/moed-math/oplaegholdere-15/Samlet_CMUpr_sentation.pdf

Dale, E. L. (2008). *Pædagogik og professionalitet.* Århus: Klim.

Drijvers, P., Monaghan, J., Thomas, M., & Trouche, L. (2014). *Use of Technology in Secondary Mathematics.* London: IB.

Grønbæk, N. (2016). CAS eller Ka'selv. I J. U. Pedersen, K. S. Spahn, & G. B. Nielsen (Red.), *Matematik med it* (s. 110-119). Nordby, Samsø: Forlaget Matematik. Hentet fra http://matematikmedit.dk

Jessen, B., Holm, C., & Winsløw, C. (2015). *Matematikudredningen.* København: MBUL. Hentet fra http://www.ind.ku.dk/projekter/matematikudredning/Matematikudredningen2015endelig.pdf

Kissane, B., Kemp, M., & Bradley, J. (1997). Symbolic manipulation on a TI-92: New threats or hidden treasures? I N. Scott, & H. Hollingsworth (Red.), *Mathematics: Creating the future* (s. 388-396). Melbourne: Australian Association of Mathematics Teachers.

Konferencen Fremtidens Matematik. (21. May 2014). Hentet fra Center for Computerbaseret Matematikundervisning: http://cmu.math.ku.dk/konference_fm/

Nabb, K. (2010). (2010). CAS as a CAS as a Restructuring Tool in Mathematics Education. *Proceedings of the 22nd international Conference on Technology in Collegiate Mathematics.*

OECD. (2015). *Students, Computers and Learning: Making the Connection.* Paris: OECD Publishing. doi:10.1787/9789264239555-en

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conception: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*(1), 1-36.

Straesser, R. (2014). Stoffdidaktik in Mathematics Education. *Encyclopedia of Mathematics Education*, 566-570. (S. Lerman, Red.) Dordrecht: Springer Science+Business Media. doi:10.1007/978-94-007-4978-8

Tall, D. (2013). *How Humans Learn to Think Mathematically.* Cambridge University Press.

Trouche, L. (2014). Instrumentation in Mathematics Education. *Encyclopedia of Mathematics Education*, 307-313. (S. Lerman, Red.) Dordrecht: Springer . doi:10.1007/978-94-007-4978-8

UVM. (2017). *Matematikkommissionens rapport.* København: Undervisningsministeriet. Hentet fra https://www.uvm.dk/aktuelt/nyheder/uvm/udd/gym/2017/jan/170116%20anbefalinger%20skal%20styrke%20matematikundervisningen%20i%20gymnasiet

Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Drijvers, P. (2014). Realistic Mathematics Education. *Encyclopedia of Mathematics Education*, 521-525. (S. Lerman , Red.) Dordrecht: Springer Science+Business Media. doi:10.1007/978-94-007-4978-8