

Rapport

om

Computerprogrammer og matematik - didaktik og faglighed

Forord

Nærværende rapport er en evaluering af et toårigt projekt om computerprogrammet Maple's vej ind i den gymnasiale matematikundervisning. Rapporten er baseret på interviews med de projektdeltagende lærere og elever om matematikundervisning med Maple samt evalueringer af kurser og seminarer gennemført som led i projektet. Det skal understreges, at der er tale om en evaluering, og at konklusioner og anbefalinger i rapporten skal ses i lyset heraf.

Indhold

0. Baggrund	2
1. Projektets formål	3
2. Praktisk tilrettelæggelse	3
3. Medvirkende og deres hovedopgaver	5
4. Gennemførte aktiviteter i form af møder konferencer mv.	6
5. Projektets hovedresultater	7
6. Udviklede efteruddannelses tilbud og formidlingen heraf	8
7. Evaluering af projektet og forslag til opfølgning	9
7.0 Indledning	9
7.1 Maple og matematik	10
7.2 Maple	11
7.3 Mapleark	12
7.4 Universiteterne og overgangen fra gymnasiet	14
7.5 Kvalitetssikring	15
7.6 Overgangen fra folkeskole til gymnasium	16
7.7 Maple i forhold til den gymnasiale ramme	16
7.8 Anbefalinger	18

0. Baggrund

Der er gennem de seneste år sket en klar stigning i antallet af elever, der anvender bærbar computer som arbejdsredskab i skolen. Der er også sket en udvikling af computer software, som eleverne har mulighed for at komme i besiddelse af, uanset om de er præsenteret for dem via deres undervisning i gymnasiet. Da studerende allerede på første del af en række af de videregående naturvidenskabelige uddannelser anvender computerbaserede matematikprogrammer som platform for flere eller alle de naturvidenskabelige fag, har flere gymnasier da også taget konsekvensen af denne udvikling og arbejder med computeren i undervisningen som afløsning for CAS lommeregneren. Et sådant skift indebærer såvel nye tekniske som didaktiske udfordringer.

I 2006 oprettedes NØRD - et samarbejde inden for de naturvidenskabelige fag mellem en række gymnasier i hovedstadsområdet. I skoleåret 2007/08 ønskede NØRD-skolerne at undersøge, hvilke muligheder der lå i anvendelse af computerbaseret matematikundervisning, og her faldt valget på det canadiske matematikprogram Maple. Maple anvendes på en række videregående uddannelser bl.a. Danmarks Tekniske Universitet (DTU) og Institut for Matematiske Fag (IMF), Københavns Universitet (KU). Med henblik på etablering af et forum for dialog om hensigtsmæssig matematik i overgangen mellem gymnasium og de videregående matematikbrugende uddannelser rettede NØRD-skolerne i 2008 derfor henvendelse til IMF, som har ekspertise på området. Hovedvægten blev lagt på faglige kurser for matematiklærere fra gymnasiet. Disse kurser underviste i brugen af matematiksoftware i konkrete emneområder af relevans for gymnasiets naturvidenskabelige fag. Dette samarbejde udmøntede sig i, at vi i efteråret 2008 søgte om midler til det pilotprojekt, som er genstand for denne afrapportering.

Grundlaget for samarbejdet er den fælles interesse universiteter og gymnasier har i den faglige udvikling på dette område - først og fremmest for at lette elevernes overgang fra gymnasiet til universitetet. Vi ønskede også at høste erfaringer med samarbejdsstrukturer, hvor IMF og andre naturvidenskabelige institutter indgår i konsortier med gymnasier - eksempelvis i arbejdet med efteruddannelseskurser for gymnasielærere, fagligt udviklingsarbejde og brobygning mellem gymnasier og videregående uddannelser.

1. Projektets formål

Hovedformålet med dette pilotprojekt har været at videreudvikle det praksisorienterede samarbejde, der var etableret mellem en række gymnasier og IMF på KU. Vi har med dette samarbejde ønsket at udvikle anvendelsen af computerprogrammer og CAS-værktøjer i matematikundervisningen med sigte på den afsluttende matematikundervisning i gymnasiet og den indledende undervisning på universitetet.

Herudover har vi ønsket at udbygge IMF's besøgsprogram for gymnasieklasser med henblik på at give gymnasierne mulighed for at tilbyde forløb, der autentisk peger mod en videregående uddannelse med mulighed for aktivt forberedende og efterbehandlende arbejde med matematiksoftware fra elevernes side.

Endelig har vi ønsket at belyse, hvilken indvirkning den øgede anvendelse af IT i matematikundervisningen har på elevers og underviseres fagopfattelse og faglighed. Pilotprojektet vil dermed konkret belyse, hvordan IMF kan bidrage til kvalitetssikring af matematikundervisningen i gymnasiet og danne grundlag for kommende samarbejdsprojekter med en bredere kreds af institutioner.

Gennem pilotprojekt er der mulighed for at gennemføre en erfaringsopsamling, evaluering og kommunikation af dette samarbejde.

2. Praktisk tilrettelæggelse

Grundstenen i projektet er to efteruddannelseskurser, som IMF har afholdt for matematiklærerne fra de deltagende gymnasier. Hvert af kurserne har været afviklet over tre tirsdage – to eftermiddage og en hel dag. Deltagerne har skullet forberede sig til hver gang. Kursusforløbet blev afsluttet med, at deltagerne skulle udarbejde et undervisningsforløb i Maple. Til hvert af disse kurser har de deltagende gymnasielærere og IMF i fællesskab udvalgt områder inden for gymnasiematematikken (f.eks. funktionsbegrebet), hvor eksperter fra IMF har kunnet give gymnasielærerne et fagligt løft. Desuden har der være fokus på, hvordan IT- og CAS-værktøjer, baseret på matematikprogrammet Maple, kan bruges i matematikundervisningen inden for det valgte emne. Herunder undersøgtes anvendelsen af netbaseret undervisningsmateriale i form af opgaver, "kogebøger", vejledninger, tests og prøver. Dermed har projektet også været med til at undersøge, på hvilken måde

computerbaserede CAS platforme som Maple i fremtiden vil komme til at indgå som et alternativ eller supplement til de lommeregnerne, som i øjeblikket benyttes i gymnasiet; men også som ramme om formel- og eksempelsamlinger. Kurserne har desuden beskæftiget sig med de didaktiske problemer og muligheder, som emneområdet indeholder, specielt hvad angår brugen af CAS-værktøjer. Den enkelte lærer har fået et certifikat, som dokumentation for gennemførelse af kurset. En nærmere beskrivelse af kurserne kan findes på kursushjemmesiden via dette link;
<http://www.math.ku.dk/kurser/2009-10/blok2/maple/>

På nogle af gymnasieskolerne har man valgt kun at lade de lærere, der havde klasser, hvor Maple skulle indgå, deltage i kurset. På andre af skolerne har man valgt en model, hvor man ville give samtlige lærere i den naturvidenskabelige faggruppe tilbud om efteruddannelse. Det var således ikke alle kursister, der havde mulighed for at gennemføre undervisning baseret på brug af Maple. De af kursisterne, der havde haft mulighed for det, har skullet arrangere undervisningsforløb for udvalgte klasser eller hold på deres skoler. Disse undervisningsforløb har skullet benytte Maple til at belyse de matematiske emner fra kurset ved hjælp af de didaktiske redskaber, som læreren tilegnede sig på kurset. Forløbene har således også dannet udgangspunkt for implementering og evaluering af computerbaseret undervisning.

Der har skullet gennemføres to evalueringsrunder. Temaerne for den første evalueringsrunde har omhandlet introduktionen, samt elevernes modtagelse af Maple, mens temaerne for den anden evalueringsrunde har skullet behandle mere avanceret og udstrakt brug af Maple, samt Maple brugt i større undervisningsforløb så som projektarbejde - evt. i forbindelse med studierejse, etc. Evalueringen er gennemført som besøg i en klasse eller hold – typisk med overværelse af en times undervisning efterfulgt af fokusgruppeinterview med en håndfuld elever, udvalgt af læreren og som bredt repræsenterede synspunkter på matematikundervisningen, og endeligt et interview med læreren. Der har været gennemført mindst et besøg hos hver af de syv deltagende lærere. Resultatet af evalueringen indgår nedenfor som en væsentlig del af projektevalueringen.

I efteråret 2009 og i foråret 2010 er der blevet afholdt to internatmøder, hvor formålet har været at opsamle og distribuere de erfaringer, der er blevet gjort undervejs. Endvidere har det været intentionen, at internatopholdet skulle give øget mulighed for afprøvning af idéer og materiale og styrke dannelsen af netværk på tværs af de deltagende institutioner. På hvert af internaterne har det

også været intensionen at invitere forskere med en didaktisk vinkel på brugen af computerbaseret matematik i undervisningen.

De erfaringer, der blev høstet i forbindelse med evalueringen af de undervisningsforløb, som implementerede pilotprojektets kursusdel, har indgået i tilrettelæggelsen af nye tiltag i IMF's besøgsprogram. Etableringen af en fælles software-plattform for gymnasiet og IMF åbner for langt mere givtige besøgsforløb, der eksempelvis kunne indbefatte flere besøg på universitetet med aktivt forberedende og efterbehandlende elevarbejde med matematiksoftware. Emnerne for flere af de gennemførte forløb har indgået i pensum til mundtlig eksamen som del af det tilvalgte pensum. Studieretningsprojekter har også kunnet komme på tale, men den del af pilotprojektet, der vedrørte udbygningen af IMF's besøgsprogram lå så sent i undervisningsforløbet, at det ikke er blevet realiseret.

Projektets formål om belysning af ændringer i fagopfattelse og faglighed forårsaget af øget brug af matematikprogrampakker indgik eksplicit i tilrettelæggelsen af kurserne. Det konkrete faglige samarbejde på tværs af de to institutioner gav diskussionen¹ af disse forhold en særlig kvalitet - både hvad angår pædagogiske og matematikfaglige spørgsmål. Fælles opfattelse af fag/fagdidaktik var ikke nødvendigvis ønskværdigt, men en fælles afklaring af problemstillingen, og hvorledes man bedst muligt kan imødekomme respektive behov, er nøglen til en smidig overgang fra gymnasium til universitet. At denne afklaring foregår i forbindelse med et udviklingsarbejde er af stor værdi.

Projektet vil blive afsluttet med en konference, hvor projektets forskellige delelementer vil være tema for de oplæg, der præsenteres.

3. Medvirkende og deres hovedopgaver

Projektets styregruppe, der har stået for planlægning og gennemførelse af projektet, har bestået af Professor Søren Eilers, Lektor Niels Grønbæk og Ph.d. studerende Rune Johansen, Institut for Matematiske Fag, Københavns Universitet, samt Lektor Claus Larsen og Lektor Henrik Bang, Christianshavns Gymnasium. Det første internat blev planlagt og gennemført af den samlede styregruppe, mens det andet internat og den afsluttende konference er blevet planlagt og gennemført

¹ Eksempelvis drøftelsen forud for planlægning af emner for - og praktisk tilrettelæggelse af nye tilbud i IMF's besøgsprogram.

af Niels Grønbæk, Claus Larsen og Henrik Bang. Niels Grønbæk har været økonomiansvarlig, mens Claus Larsen og Henrik Bang har gennemført evaluering af undervisningsforløbene, samt haft ansvar for projektevaluering og rapportskrivningen.

Institut for Matematiske Fag, Københavns Universitet har været projektansøger og har endvidere stået for udviklingen af efteruddannelseskurserne for de deltagende gymnasielærere. Rune Johansen har været ansvarlig for udarbejdelsen af materiale til og afviklingen af efteruddannelseskurserne. Niels Grønbæk og Søren Eilers har udviklet materialet til brug for undervisningsforløbene, som afvikles som nye tilbud i IMF's besøgsprogram.

NØRD er et åbent samarbejdsforum af gymnasier samlet om udvikling af matematisk og naturvidenskabelig undervisning. De deltagende gymnasier i dette projekt har været Christianshavns Gymnasium, Københavns Åbne Gymnasium, Nørre Gymnasium og Sankt Annæ Gymnasium. Gymnasierne har iværksat lærernes efteruddannelse i Maple samt bidraget med lærere og elever til implementeringen af Maple i undervisningen. Rektor Troels Vang Andersen, Christianshavns Gymnasium har været gymnasieskolernes repræsentant.

Professor Carl Winsløw, Institut for Naturfagernes Didaktik (IND), Københavns Universitet har deltaget i flere møder angående den indledende planlægning samt bidraget med et foredrag på det første internat. Han har endvidere sammen med konsulent Christine Holm, IND deltaget i flere møder i projektets afsluttende fase og bidraget med værdifulde kommentarer og anbefalinger vedrørende den didaktiske del af projektets evaluering.

4. Gennemførte aktiviteter i form af møder konferencer mv.

Der har igennem hele projektforsløbet været afholdt møder i styregruppen om planlægning af evalueringer, besøgsprogram, internatmøder og konference. De fleste møder har ud over et logistisk/praktisk indhold med henblik på at facilitere projektets forskellige begivenheder, tillige haft et didaktisk indhold.

De egentlige erfaringsindsamlinger, distribution af materialer inspiration fra forskere mm., er dog foregået på de to internatmøder i Sorø på Mærsk McKinney Møller Videntcenter og i Holbæk på Sømestationen. Program for de to internatmøder fremgår af bilagene 1 og 2.

Den afsluttende konference afholdes på Institut for Matematiske Fag, Københavns Universitet. Link til konferencehjemmeside;

http://www.math.ku.dk/forskning/konferencer/computere_og_matematikundervisning/

5. Projektets hovedresultater

Præliminært til nærværende pilotprojekt støttet af UVM blev der afholdt det første efteruddannelseskursus på IMF. Det var som nævnt ovenfor samarbejdet om etableringen af dette kursus, der initierede ansøgningen om pilotprojektet. Inden for rammerne af pilotprojektet er der blevet afholdt to kurser. Der er altså sammenlagt afholdt tre kursusforløb, som løbende er blevet evalueret og justeret i overensstemmelse hermed. Et tiltag på det sidste af kurserne var udviklingen af en gymnasiepakke til Maple, dvs. en pakke man kan installere, hvis man ønsker at skjule nogle af de mere avancerede sider i Maple eller gøre kommandoer mere genkendelige for gymnasieelever – f.eks. ved at man ikke behøver at bruge Maple's egne mere avancerede pakker. Dette var et ønske fra flere af de deltagende lærere. Konkluderende kan man sige, at IMF har udvidet sin ekspertise til også at omfatte efteruddannelse i brug af Maple. Der er til kurserne oprettet en hjemmeside. På linket <http://www.math.ku.dk/kurser/2009-10/blok2/maple/> findes en række af de arbejdsark, som IMF har udviklet, samt nogle af de undervisningsforløb deltagerne har bidraget med.

Der er udviklet gennemprøvede undervisningsforløb som del af IMF's besøgsprogram. Materialet kan findes via. nedenstående link;

<http://www.math.ku.dk/~gronbaek/Besogsprogram/>

<http://www.math.ku.dk/~eilers/2x/>

I den ene af besøgsklasserne er der gennemført en evaluering i to afdelinger. Første del bestod af en spørgeskemaundersøgelse umiddelbart efter sidste besøg. På baggrund af denne blev der udarbejdet en spørgeguide ud fra hvilken, der blev gennemført et fokusgruppeinterview med fem elever fra besøgsklassen. Det var den lærer fra IMF, som havde tilrettelagt besøgene sammen med klassens lærer, der gennemførte interviewet. Spørgeguide og det skrevne interview med eleverne findes i bilagene 3 og 4.

Kursusdeltagerne har ved hjælp af fildelingssystemet Dropbox haft mulighed for at dele det materiale, som de har udviklet med hinanden. Der er ikke offentlig adgang til disse filer, idet det

også skulle være muligt for lærerne at lægge dokumenter ud, som var under udarbejdelse og dermed halvfærdige.

6. Udviklede efteruddannelses tilbud og formidlingen heraf

Strukturen i efteruddannelsen i brug af Maple har en række træk, som er karakteristisk for et moderne efteruddannelses tilbud. For det første er der dannet et konsortium med flere interessenter – først og fremmest NØRD-sammenslutningen og IMF, som uafhængigt af UVM-interesser har været interesseret i at være fælles om et efteruddannelses tilbud. IMF har haft interesse i at tilbyde et færdigt efteruddannelses tilbud inden for computerbaseret matematik. Skolerne har haft en interesse i at have en ramme for systematisk kompetenceudvikling af matematiklærere, som var attraktiv for lærerne og billig for skolerne. Endeligt har skolerne og IMF været interesseret i dialogen - skolerne for at finde ud af, i hvilken retning deres matematikundervisning skal gå for at kvalificere til universiteterne og IMF med hensyn til, hvad de kan forvente, når de rekrutterer studerende.

Efteruddannelsen er en faglig efteruddannelse. Med sin deltagelse i kurset har man gennem forberedelse og udviklingen af undervisningsforløb udviklet faglige kompetencer. Kursusbeviset er en dokumentation herfor og kan bruges som kvalifikation ved stillingsansøgninger såvel i som udenfor gymnasieskolen.

Vi ser her en anden model for efteruddannelse end eksempelvis gym-IT eller traditionelle eksternat- eller internatkurser; idet efteruddannelsen, ifølge den gennemførte model, først og fremmest er baseret på hjemmearbejde.

Den didaktiske refleksion er uomgængelig i en faglig efteruddannelse for undervisere. Hvordan indføres Maple som en del af matematikundervisningen? Hvilke muligheder giver indførelsen af nyt værktøj, hvilke begrænsninger sætter det? Er der emneområder, som bliver trivielle, er der emner, vi kan belyse på en ny måde? Påvirker indførelse i Maple elevernes måde at kommunikere med hinanden på? Hvorledes påvirkes elevernes kommunikation med læreren? Hvad bliver lærerens rolle? Hvad kræves der af Maple? Skal man indføre ”gymnasiepakker”, hvor for eksempel komplekse tal er slået fra, og hvor man på simpel vis kan regne med gradtal? Spørgsmålene kan delvist besvares, og ansatser hertil er gjort nedenfor. Alt afhængig af faglige og institutionelle rammer vil et nuanceret svar kræve en langt større indsats.

Udgangspunktet for efteruddannelsen i projektet er, at mange lærere alene har beskæftiget sig med CAS – værktøj ved hjælp af håndholdte lommeregner, og at overgang til computerbrug ikke kun repræsenterer et andet værktøj, men involverer mange sider af matematikundervisningen. Samtidigt er det, som antydtes i indledningen, i højere grad blevet naturligt for eleverne at anvende computerbaseret matematik. I fokusgruppeinterviewet gav eleverne udtryk for, at de fra folkeskolen var vant til at aflevere skriftlige matematikopgaver elektronisk eller som elektroniske prints. Da de begyndte i gymnasiet skiftede de til papir og blyant. Det er vores indtryk, at denne tendens er generel, om end det kan være meget simple værktøjer eleverne er vant til at bruge. Modstanden på læresiden over for computerbaseret matematik har, som vi også har mødt i dette projektforsøg, hvor det er Maple, der er udfordringen, bl.a. været:

- Værktøjernes tilgængelighed - idet man især ser på de svagere elevers tilgang til CAS og at computeren i den forbindelse er yderligere ”et trin opad”. Bekymringen der udtrykkes kan f.eks. være at Maple er så meget mere kompliceret, at elever, der måske kunne løse simple opgaver tidligere, nu risikerer lavere karakterer, fordi de ikke forstår Maple endsige de fejlmeddelelser, de får.
- Den gevinst, de dygtigste elever opnår med et mere avanceret værktøj, kunne man måske opnå med andre midler, som mere specielt er rettet mod de dygtigste (og ikke på samme måde involverer hele klassen).
- Enkelte lærere føler sig usikre over de didaktiske eller Maple-faglige aspekter i undervisningssituationerne; som beskrevet ovenfor, udgør gruppen af matematiklærere – også i målgruppen for dette projekt – langt fra en homogen gruppe. Og selvom langt de fleste er kompetente IT-brugere, opfattes Maple som et yderligt komplicerende lag i selve undervisningssituationen.

7. Evaluering af projektet og forslag til opfølgning

7.0 Indledning

Formålet med denne rapport er at dokumentere, at projektansøgningens konkrete tiltag er blevet realiseret såvel som at formidle de resultater og erfaringer, projektet har kastet af sig i form af materialer, arbejdsformer og anbefalinger til videre arbejde. Første del af formålet er behandlet i ovenstående afsnit. Den anden og mere fremadrettede del af formålet kalder på en lidt grundigere behandling. Nærværende afsnit beskriver indledningsvis relationerne mellem CAS værktøj og

Matematik, herefter beskrives Maple, som er det CAS værktøj, der har været genstand for undersøgelse i dette projekt. Dernæst udfoldes nogle af de mere almene didaktiske overvejelser, der udspringer af de evalueringer, der er blevet gennemført med elever og lærere. Selve evalueringsmaterialet, som er omfattende, er ikke færdigbehandlet, da dette ligger udenfor denne rapports rammer, men for at illustrere de perspektiver, der er i en opfølgning af projektet, er der gennemført en eksemplarisk analyse af en undervisningssituation (bilag 5). Afslutningsvis anvises forslag til opfølgende arbejde.

7.1 Maple og matematik

Matematik og matematisk praksis har altid fungeret i snæver vekselvirkning med de redskaber, man betjener sig af. Eksemplerne herpå er mangfoldige. Både i form af en dyb organisk sammenhæng som mellem geometri og passer/lineal og i form af en sammenhæng mellem nyere (men nu nærmest forældede) redskaber og matematisk praksis. F.eks. kan særlige teknikker knyttet til tabelbrug, brug af regnestok eller særlige koordinatpapirer næppe adskilles fra den matematiske virksomhed, der udfoldes under brug af dem.

Brug af computeren kan i mange sammenhænge udvikle sig som en organisk del af matematikken – en hel del nyere matematik er utænkelig uden computere og handler ligefrem om computermatematik.

CAS værktøjerne har hidtil i matematik*undervisningen* tilsyneladende fungeret som avancerede regnestokke og tabeller - instrumenter, der letter opgaveregning, tegning af grafer samt ligningsløsning.

Naturligvis smitter disse værktøjer af på, hvordan matematik praktiseres, og hvilken matematik det er muligt at praktisere. Regression er mulig uden (grafisk) lommeregner eller regneark, men metoden bliver først rigtig relevant med disse hjælpemidler. Definition af logaritmefunktionen ud fra funktionalligningen er måske særlig oplagt eller relevant for eleverne, hvis man allerede har omgang med den måde en regnestok virker på. Omvendt er en del traditionelt arbejde med funktionsundersøgelse blevet trivialiseret med CAS i en sådan grad, at det ikke længere kan eller bør spille samme rolle som tidligere. Med funktionsundersøgelserne forsvinder imidlertid også asymptoter og med dem en vigtig anvendelse af grænseværdibegrebet. Således kan en række teknikker nu erstattes af CAS-operationer, hvilket nødvendiggør at undervisningsfaget organiseres

anderledes – alternativet kan ofte være en uhensigtsmæssig reduktion af faget og specielt dets erkendelsesmæssige sider.

Projektets didaktiske fokus – først og fremmest på de to internater - har været at inspirere til og undersøge en mere avanceret brug af CAS, og ikke kun at skabe genveje til løsningen af velprøvede opgavetyper. Desuden har der været fokus på, hvordan nye opgavetyper og arbejdsformer kan påvirke elevernes udbytte af faget.

Overvejelserne er tentative. På mange måder er såvel universiteter som gymnasier så at sige 'snublet' ind i anvendelsen af CAS - en anvendelse, der er initieret nok så meget af teknologisk udvikling på både software- og hardware siden som af behov i undervisningsmiljøet².

7.2 Maple

Maple er en omfattende programpakke, der vedligeholdes med nye versioner hvert år. Foruden den løbende opdatering/udvikling er der organiseret forskellige web-fora og konferencer, der giver muligheder for at finde og diskutere løsninger på problemer både i forhold til undervisning og konkret matematisk indhold i Maple. Maple kan installeres individuelt via en CD, men flere af de deltagende skoler har ligesom universiteterne en site-licens, hvorfra man kan downloade programmet. Maple integrerer de fleste basale matematikredskaber/områder og kan på mange måder anskues som et universalværktøj i Matematikundervisningen.

På seminarerne og i diskussionen af de gennemførte undervisningsforløb har der været fokus på mange små som store problemer/udfordringer/muligheder, som Maple tilbyder i undervisningen.

Først og fremmest giver Maple, når der arbejdes med funktioner og ligningsløsning, muligheder for en varieret tilgang, der integrerer grafer og algebraiske løsninger. Maples syntaks kan volde problemer, men hjælpefunktionen er udmærket. Ofte findes der forskellige alternativer til løsning/illustration af samme problem, og som underviser vil man tit blive konfronteret med, at eleverne finder andre tilgange end dem, man selv forestiller sig. Udbyderen af Maple har dog ikke nogen hotline, som muliggør hjælp til løsning af problemer med selve programmet, dets installation

² Maple er nu også et program, der i høj grad er drevet frem af en videnskabsfaglig interesse – fx behov for hurtige og pålidelige "beregninger" i vid forstand - som ikke uden videre kan kopieres ind i undervisningsfaget, hvor erkendelsesinteressen typisk er primær.

samt problemer man ikke lige kan finde ved hjælpefunktionen. Der findes heller ikke et organiseret forum for udvikling og tilpasning af Maple til en dansk undervisningskontekst.

Som nævnt andetsteds vil arbejdet med Maple af og til også give eleverne løsningsmodeller, som de har vanskeligt ved at forstå (men som samtidig kan åbne et vindue på klem til en stor og ”ubeskyttet” verden af avanceret matematik). Dette kunne være komplekse løsninger til et ligningsudtryk eller vanskeligheder, hvis de har brugt fysiske enheder i et formeludtryk og ønsker at isolere en bestemt variabel. Det kan også opleves uhensigtsmæssigt, at Maple arbejder med radianer i de trigonometriske funktioner og ikke, som lommeregneren, har en ”mode” knap. I projektet har der været arbejdet med flere tilgange til at løse denne type problemer.

Man kan forsøge at indlære bestemte vaner hos eleverne med det formål, at en bestemt problemtype ikke dukker op. Som eksempel kan man bruge enheden (”unit”) ”degrees”, hver gang man regner med vinkler i grader.

En anden mulighed, som også er blevet afprøvet i dette projekt, er at arbejde med en ”gymnasiepakke”. Her har man på forhånd installeret nogle ekstra Maple kommandoer, der undgår applikationer, som er uhensigtsmæssige i en gymnasiesammenhæng. Derved tilpasses Maple, så det f.eks. bliver lettere at arbejde med geometriske vektorer, på den måde man plejer i gymnasiet (og ikke som en del af en omfattende lineær algebra pakke i Maple). Endeligt er det væsentlig at erkende de problemer Maple giver anledning til og arbejde med at bearbejde dem matematisk.

Det er uden for denne rapports rammer at udvikle en detaljeret Maple-didaktik – men ovenstående er blot nævnt som konkrete overvejelser af fordele og ulemper ved forskellige løsningsmodeller ved anvendelsen af Maple.

7.3 Mapleark

Et fællestræk ved den gennemførte undervisning er anvendelsen af ’Mapleark’ i undervisningen – delvist inspireret af de gennemførte kursusforløb, som igen er inspireret af Maplebrugen på KU. Det er ark, der belyser bestemte problemstillinger f.eks. tegning af grafer, ligningsløsning, regning med vektorer eller regression. Arkene består dels i introduktion af en række kommandoer, der er nødvendige eller hensigtsmæssige inden for det pågældende område, dels i opgaver der folder disse

teknikker ud. Opgaverne er som oftest relevante i sig selv, men kan også være særligt fokuserede på bestemte tekniske aspekter.

Arkene vil kunne finde anvendelse i forbindelse med lignende problemstillinger og opgaver fremover med brug af ”copy-paste funktionen”. Vi har set eksempler på, at elever også bruger egne og andres opgaver med denne funktion. I et tilfælde har vi set elever oprette en hjemmeside med det formål at have et forum for fildeling. I andre tilfælde er fildelingen sket via oprettelsen af grupper i det webbaserede lektionssystem, lectio.

Igen er det ikke inden for dette projekts rammer muligheder for at gå i dybden med didaktiske (u)hensigtsmæssigheder i denne praksis – men overordnet giver Maple muligheder for en stor fleksibilitet, som under uheldige omstændigheder kan udvikle en overfladiskhed, hvis al opgaveløsning bliver til et spørgsmål om tilstrækkeligt smarte kommandoer. I elevinterviews er vi bl.a. stødt på denne bekymring.

Maple inviterer på en række områder til at arbejde med emner, der ikke i dag er repræsenteret i det almene gymnasium. F.eks. problemstillinger med flere ligninger med flere ubekendte og andre aspekter af området ”lineær algebra”. Vi har i projektet set et enkelt eksempel på et sådant udviklingsarbejde – arbejde med kurver i 3D som det vil være interessant at fortsætte på dette og andre områder, hvor Maple måske har særlige kvaliteter.

I projektet har deltaget en del lærere, der enten havde et naturvidenskabeligt fag ved siden af matematik eller evt. udelukkende havde naturvidenskabelige fag³. Brugen af Maple i disse fag har været undersøgt, men har ikke været tilstrækkeligt i fokus til at føre til væsentlige konklusioner. Det er naturligvis af betydning for fag, hvor man hidtil har kunnet gå ud fra at eleverne har haft lommeregner med, at man nu skal vænne sig til at eleverne anvender computer. Omvendt er det vores indtryk fra samtaler med de projektdeltagende lærere, at brugen af Maple i f.eks. fysik kan understøtte elevernes kompetence til at navigere i programmet.

Som en delvis afrunding af dette afsnit skal det understreges, at det aldrig har været dette projekts intention at anbefale Maple som den eneste CAS/Computer platform i matematik i gymnasiet.

³ Distinktionen mellem realvidenskab og formalvidenskab er ikke vigtig for os, men de forskellige former for praksis i undervisningsfagene er. Det gør en stor forskel om lærerne er uddannet i matematik eller ej.

Selvom det er muligt at løse studentereksamensopgaver alene ved brug af Maple redskaber, er der både i den 'virkelige verden' og i den 'gymnasiale' andre behov, der skal tilgodeses. Et regneark som Excel eller lignende finder bred anvendelse og egner sig på mange måder bedre end Maple til hurtig databearbejdning – det være sig i deskriptiv statistik eller analyse af forskellige vækstmodeller. Excel letter i høj grad samarbejdet med andre fag som blandt andet AT- forløb og udfylder som sådan en vigtig funktion, som Maple næppe kan udfylde.

På samme måde forholder det sig med programmer som Geogebra eller Geometer, der som tegneprogrammer f.eks. i forbindelse med geometriske konstruktioner eller i arbejdet med analytisk geometri tilbyder en anden tilgang end Maple, som har særlige fordele i forbindelse med disse dele af matematikken.

Vi har såvel på seminarer som i lærer- og elev interviews beskæftiget os med problemstillingen om, hvor mange platforme eleverne kunne håndtere, og der er ikke konsensus herom.

7.4 Universiteterne og overgangen fra gymnasiet

Som nævnt andet steds i rapporten er begrundelsen for at tage netop Maple op i gymnasiet, at det er en vigtig platform på de videregående uddannelser. Inden for projektets rammer har det ikke været muligt at udforske de motiver, der på f.eks. KU eller DTU ligger til grund for valget af Maple. Blot kan vi konstatere, at programmet især på første år er en vigtig ramme for opgaveregning, men at det senere i studieforløbet anvendes mindre i hvert fald på de rene matematikstudier – delvis fordi det afløses af mere specialiserede programmer, delvist fordi den form for matematik, som Maple kan håndtere, er mest i fokus i de indledende dele af matematikstudiet.

Maples *autenticitet* i gymnasial sammenhæng afhænger af to aspekter:

- på den ene side af i hvor høj grad Maple er tilpasset de snævre gymnasiale mål - herunder skriftlige eksaminer, projektopgaver og AT.
- på den anden side af, at Maple peger mod arbejdsformer, der kendetegner en bred vifte af videregående uddannelser, hvor brug af matematik er essentielt.

I afsnittet om Maple ovenfor har aspekter af det første været behandlet, og det må konkluderes at Maple *er i stand til* opfylde denne funktion – såvel elever som lærere har givet udtryk herfor. Der er

dog det forbehold på lærersiden⁴, at der hos nogle er en vis betænkelighed med hensyn til de svagere elever. Der er naturligvis mange andre platforme herunder lommeregnerne, der er i stand til at udfylde denne rolle. Dette skyldes ganske vist til dels, at de faglige mål i så henseende er udformet med lommeregneren som udgangspunkt.

Med hensyn til det andet punkt afhænger det naturligvis af, *hvordan* Maple bruges i den gymnasiale undervisning. Projektet har f.eks. i forbindelse med besøgsprogrammet⁵ eller i specielle forløb frem mod en studierejse observeret eksempler⁶ på opgaveformer, der nærmer sig opgaver på matematikstudiet eller DTU. Der forestår her et betydeligt udviklingsarbejde. Men det gælder naturligvis mindst lige så meget for andre CAS platforme. Man kunne i højere grad end sædvanligt lade eleverne selv udforske Maple i forhold til opgaverne - en form for *fremadrettet arbejde med overgangen fra gymnasium til universitet*.⁷

7.5 Kvalitetssikring

Et aspekt ved dette projekt, som givet kunne udfoldes mere, er kvalitetssikring. For gymnasiet som studieforberedende uddannelse er det afgørende at være i dialog med aftagerne. Selvom kun en lille del af gymnasiets elever med matematik på B eller A niveau skal læse fag med et stort indhold af matematik, er det centralt for matematiklærerne at være i dialog med netop de matematiktunge uddannelser for derigennem at aflæse nye tendenser og arbejdsmåder. Og omvendt er det vigtigt, at de universitære fagmiljøer gennem en konkret dialog bidrager til kvalitetssikringen af matematikundervisningen i gymnasiet.

Det er vores indtryk, at projektet ikke mindst på internaterne har bidraget i så henseende, og at en fælles platform som Maple kan være en løftestang i denne dialog.

Ikke mindst har vi prøvet at få fælles didaktiske indfaldsvinkler ved at inddrage nyere forskning i brugen af CAS i undervisningen, som i høj grad er et internationalt fænomen. En vinkel vi også har

⁴ Forbeholdet hos lærerne er bl.a. knyttet til indgangstærsklen og hjælpemulighederne i Maple.

⁵ Se undervisningsmaterialet til de to undervisningsforløb i IMF's besøgsprogram;

<http://www.math.ku.dk/~gronbaek/Besogsprogram/>

<http://www.math.ku.dk/~eilers/2x/>

⁶ Se program for internat 2.

⁷ Der tænkes her på de specifikke matematikkompetencer og ikke almene studiekompetencer, idet tydeliggørelse af matematikfagets arbejdsmåder har en særlig værdi i de gymnasiale uddannelser.

søgt at udvikle i forbindelse med projektets afsluttende konference, hvor en betydelig del er afsat netop til refleksion over, hvor Maple (og lignende værktøjer) flytter matematikundervisningen hen.

7.6 Overgangen fra folkeskole til gymnasium

Denne overgang har ikke været helt så meget i fokus som den forudgående, men blandt andet i kraft af de mange elevinterviews, har det alligevel været muligt at belyse aspekter heraf.

Vi konstaterer⁸, at mange elever fra Folkeskolen er vænnet til at aflevere matematik på computer – det kan være i Excel eller Word – enkelte har også prøvet mere avancerede programmer, eksempelvis Mat-Cad eller Geogebra. Introduktionen af Maple i begyndelsen af gymnasieforløbet som en avanceret skrivemaskine i ”document mode” vil kunne tiltale en del elever ved at tilbyde et forholdsvis enkelt format til lay-out af opgavebesvarelser.

Vi har også diskuteret computer contra lommeregner med elever, der har prøvet begge dele; og der er konsensus om, at Maple skal introduceres tidligt (og grundigt) for at kunne få alle med. Nogle elever – især piger⁹ – foretrækker til en vis grad at kunne lave udregningerne ved siden af computeren (”i hånden”) og kan tendentielt hægtes af, fordi denne arbejdsform, hvor Maple kun bruges lidt, ikke er helt så effektiv til indlæring af kommandoer, syntaks, osv.¹⁰

Elever, der er vænnet til at anvende Maple, angiver at det svarer til den IT-brug, de allerede fra folkeskolen er vænnet til, hvor man søger, klikker og ”copy-paster”. Her forekommer Maple dem naturlig og fleksibelt.

7.7 Maple i forhold til den gymnasiale ramme

Implicit har vi i projektet arbejdet ud fra, at Maple primært introduceres i studieretninger med matematik på mindst B niveau. Faktisk har de deltagende klasser alle været med A niveau. På nogle af deltager-skolerne anvendes Maple nu også på B niveau, og vi er bekendt med, at man nogle steder i landet også har arbejdet med Maple på C-niveau.

⁸ Synspunktet har vi mødt i flere elevinterviews. Konkret kan der henvises til bilag 4, som er referat af fokusgruppeinterviews i forbindelse med IMF's besøgsprogram.

⁹ Det kommer til udtryk i udtalelser som: ”Jeg lærer bedst, når jeg har gjort det selv” eller ”Jeg bruger mest Maple som en slags skrivemaskine”. Fra elevinterviews på Nørre Gymnasium og Sankt Annae Gymnasium.

¹⁰ Problemet kalder på et nøjere studium af hensigtsmæssig læringsadfærd og indbyggede invitationer i Maple – f.eks brug af højreklik.

I forhold til en karakterisering af de 3 niveauer, hvor C er en form for *alment* grundlag, B niveau handler om *brug* af matematik i og uden for faget og A om *matematik i faget*, er der brug for en tilsvarende karakterisering af CAS med computer.

Maples krav om matematisk stringens – f.eks. i arbejdet med funktioner og forholdet mellem funktion og ligning, og Maples mange muligheder for at arbejde systematisk og dokumenteret med algebra betyder, at værktøjet i rimeligt grad understøtter den ovenstående karakterisering af A-niveauet. Det vil måske være hensigtsmæssigt, at eleverne i en vis udstrækning selv deltager i udarbejdelsen af Maple-ark – f. eks. i forbindelse med matematik-rapporter, ligesom det - som det også er gjort i forbindelse med besøgsprogrammet – vil være relevant at kunne arbejde med Maples begrænsninger.

Når Maple skal understøtte kravene på B niveau, har man brug for brug for en vis tilpasning/drejning, så anvendelserne kommer mere i fokus f.eks. ved, at man i højere grad, end hvad man gør i studieretninger med A-niveau, bruger færdige Maple-ark tilpasset de enkelte emner.

Vi har ingen erfaring med Maple på C-niveau, men her må man forvente at Maple kun bruges i udvalgte sammenhænge. Fokus med hensyn til IT i matematik på C-niveau bør ligge på matematik i regneark og brug af ikke-CAS lommeregner.

Maple vil på alle tre niveauer udfordre dele af den traditionelle matematik undervisning. Læreren vil ikke i samme grad have fuld kontrol over læreprocessen, og af og til vil han/hun støde på elever, der har fundet andre muligheder, end dem læreren havde tænkt¹¹. Der vil måske vise sig behov for mere værkstedspræget undervisning. Maple opgaveløsning vil være en udfordring til lærebogen, der ikke kan tilbyde den samme 'søg og klik' funktionalitet.

7.8 anbefalinger

På baggrund af undersøgelsen kan anbefalinger til videreudvikling og undersøgelse inddeles i en specifik og en generel del.

¹¹ Er observeret ved flere klassebesøg, f.eks. kreativ brug af Maple's tegnefunktioner og elevfremlæggelser, der dokumenterede en selvstændig og anderledes elevbesvarelse.

Specifikke anbefalinger

- I lyset af, at programmer som Maple betyder en omfattende ændring af matematikundervisningen, er der brug for en iværksættelse af efteruddannelsestilbud i anvendelsen af computere i matematikundervisningen samt i andre fag, hvor CAS værktøjer er relevante. Tilsvarende behov opstår som nævnt i andre fag, og de må adresseres særskilt.

Matematiklærerne besidder generelle IT- kompetencer, men under projektet, har det stået klart, at det er på lærersiden og ikke elevsiden de største IT barrierer ligger. Der kan være mange forklaringer herpå; lærernes omfattende erfaring med CAS-fri teknikker kan skygge for CAS-teknikkernes muligheder på en måde, som eleverne ikke er "belastet" af. Det kan også være, at pragmatiske og epistemiske værdier af teknikker vurderes forskelligt af de to brugergrupper. Overordnet er der dog en del der tyder på, at også på matematikområdet må vi tilslutte os Studielektor Steen Larsen (UVM), når han siger; "En del lærere har behov for efteruddannelse. Det er ikke generelle it-kurser, der er brug for, men mere fagspecifikke ting, og det bliver et af vores kommende fokuspunkter"¹².

- Der er brug for udvikling og formidling af opgaver, materialer og undervisningsforløb, der udnytter Maples styrker. Det er i denne forbindelse vigtigt at udvikle opgavetyper og løsningsmetoder, der i højere grad understøtter læringsprocesser end metoder, der sigter mod løsning af opgaver til skriftlige prøver i deres aktuelle form.

Der foreligger i dag – og udvikles fortsat - undervisningsmateriale til Maples anvendelse i undervisningen. Potentialet i dette område er imidlertid langt fra udtømte og nødvendiggør en langt mere omfattende indsats.

- Der er brug for en videreudvikling af universiteternes besøgsdel rettet imod især de aspekter i gymnasiet, der peger mod de videregående uddannelser med fokus på studierelevante arbejdsmåder. Dette fokus bør i højere grad tage afsæt de gymnasiale læringsmål, sådan at emnerne for besøgene ligger i forlængelse af gymnasieniveauet - både hvad angår indhold og arbejdsform.

¹² Gymnasieskolen 9.september 2010

Vi har ovenfor berørt IMF og beslægtede videregående uddannelsers rolle som kvalitetssikringsinstanser. Det samarbejde, der etableres gennem besøgsprogrammet, har endvidere den gevinst, at det danner en konkret mulighed for dialog.

Generelle anbefalinger

- En undersøgelse af hvorledes gymnasiet kan udnytte og bygge videre på folkeskoleelevernes IT-kompetencer indenfor computerbaseret matematik og hermed kvalificeret mediere overgangen til universitet.

Den computerbaserede matematik tilbyder en ramme, inden for hvilken elevernes IT-kompetencer i matematik kan udvikles progressivt fra folkeskole til universitet.

- En undersøgelse af den rolle redskaber spiller i matematikundervisningen og konsekvenserne for den matematik, der praktiseres.

Der er ingen tvivl om at ændringen i brug af redskaber ændrer hele den matematiske praksis. En undersøgelse af hvor omfattende en ændring, der skabes ved brug af computerbaseret matematik, og i hvilke retninger en sådan ændring går, er måske det mest fundamentale perspektiv, man kan lægge på området. I den forstand vil en afklaring gennem sådan en undersøgelse have konsekvenser inden for alle aspekter af området.

- En undersøgelse af arbejdsformer som aktuelt og potentielt knytter sig til brug af computerbaserede redskaber i matematikfaget.

Eleverne har klar fordel af de muligheder, som fildeling, udarbejdelsen af standardark i Maple, copy/paste fra elektroniske formelsamlinger, osv. tilbyder. Spørgsmålet er, hvordan man kan skabe nye typer af matematikopgaver, hvor disse naturlige muligheder kan indgå i løsningen på en sådan måde, at det ikke trivialisere den.

- En undersøgelse af virkningen af computerbaserede programmer i matematik uden for matematikfaget med henblik på afdækning af behov for efteruddannelse af ikke-matematiklærere, udvikling af nye opgavetyper mm.

Det kan typisk dreje sig om naturfagene og de samfundsfagene, hvor eleverne vil have glæde af, at undervisningen understøtter eller trækker på IT-kompetencerne fra matematik.

- En undersøgelse af hvad IT betyder for lærerrollen.

Som det er antydnet ovenfor, bliver lærerrollen udfordret af de nye IT medier. Udviklingen sker så hurtigt, at det kan være vanskeligt for lærerne at følge med udviklingen. Læreren kan derfor ikke have fuldt overblik over mediet i alle dets aspekter, hvilket udfordrer underviserrollen.

- Der bør arbejdes på, hvordan elevernes udbytte af computerbaserede matematikundervisning kan evalueres, så den svarer til de arbejdsformer, der anvendes og de emneområder der undervises i (altså så der fastholdes en alignment mellem eksamen og undervisning, som traditionelt har været høj i gymnasiets matematikfag).

Endeligt er det meget vigtigt, at der er en overensstemmelse mellem undervisningspraksis og evaluering af eleverne. Den sidste anbefaling retter sig derfor mod udformning af den mundtlige og den skriftlige studentereksamen i matematik.