

Rapport

Udviklingen af brug af computerbaserede matematikprogrammer i gymnasiet

- Et dialogforumprojekt

Forord

Nærværende rapport er en evaluering af et toårigt projekt om computerprogrammet Maple's vej ind i den gymnasiale matematikundervisning i forhold en række fokusområder. Der er tale om videreførelse og udbygning af et samarbejde mellem Christianshavns Gymnasium, Nørre G, Sankt Annæ Gymnasium, Københavns Åbne Gymnasium, Gefion, Aurehøj Gymnasium og HTX Lyngby og Institut for Matematiske Fag (MATH) Københavns Universitet¹. Rapporten er baseret på interviews med de projektdeltagende lærere og elever om matematikundervisning med Maple samt evalueringer af kurser og seminarer gennemført som led i projektet. Det skal understreges, at der er tale om en evaluering, og at konklusioner og anbefalinger i rapporten skal ses i lyset heraf.

Indhold

0. Baggrund	2
1. Projektets formål	3
2. Praktisk tilrettelæggelse	3
3. Medvirkende og deres hovedopgaver	6
4. Gennemførte aktiviteter i form af møder konferencer mv.	7
5. Projektets hovedresultater	7
6. Udviklede efteruddannelses tilbud og formidlingen heraf	8
7. Evaluering af projektet og forslag til opfølgning	9
7.0 Indledning	10
7.1 Erfaringer og overvejelser angående projektets fokusområder	11
7.2 Maple og matematik	14
7.3 Opfølgning på projektet – oprettelsen af CMU	17

¹ I skoleåret 2008-10 gennemførtes et pilotprojekt om computerbaseret matematik i gymnasiet. Projektet, der var støttet af Undervisningsministeriet (UVM), afsluttedes med en konference d. 26/10-2010. På konferencehjemmesiden http://www.math.ku.dk/english/research/conferences/2010_and_before/computere_og_matematikundervisning kan man endvidere rekvirere den afsluttende rapport skrevet til UVM. Det er på baggrund af nogle af rapportens konklusioner, at ansøgningen til nærværende projekt skal ses.

0. Baggrund

I de senere år er der sket en voldsom udvikling i brugen af computer i matematikfaget både i gymnasiet og på videregående uddannelser. I gymnasiet er lommeregneren på vej ud² og på de videregående uddannelser arbejdes der mange steder i introduktionsforløbene med computerprogrammet Maple. Det har givet et behov for efteruddannelse af gymnasielærere med et fokus på, hvor CAS fører matematik og matematikundervisningen hen.

I det hidtidige samarbejde³ mellem MATH og skolerne er der blevet afdækket en nogle områder, det er særligt vigtigt at fokusere på:

- Der er behov for at udvikle undervisning, der i særlig grad udnytter CAS programmernes styrkesider. Hittidig indførelse af CAS (primært lommeregner) er i høj grad blevet absorberet i eksisterende pensum og forløb. Med en mere avanceret CAS brug udfordres denne praksis og der er en fare for at matematikfaget trivialiseres. Omvendt ligger der muligheder for at motivere matematik på nye måder, arbejde med mere avancerede modeller, visualiseringer mm. Blandt emner/temaer man kunne forestille sig at udvikle på inden for matematikfaget kunne være ligningsløsninger – herunder ligninger af flere variable – grænseværdibegrebet, funktionsbegrebet og kurver.
- Der er behov for se på, hvordan den mere avancerede brug af CAS, der f.eks. ligger i Maple kan udvikles/udbredes til andre fag på studieretninger med matematik, og på hvordan lærere i f.eks. kemi, samfundsfag og biologi og fysik, der (endnu) ikke har kendskab til CAS programmer kan involveres. Modellering er et oplagt emne inden for anvendelse af matematik med CAS.
- Endvidere er der behov for at udvikle hensigtsmæssige arbejdsformer vedrørende opgaver, rapporter og vejledning. Heri ligger også at arbejdsprocesser, der knytter sig til retning af opgaver adresserer, at de skriftlige produkter er udarbejdet, afleveret og rettet elektroniske, samt at tilbagemeldingen er elektronisk. Det elektroniske medie skal ses i sammenhæng med selve læreprocessen – ikke som et teknologisk appendiks.
- Endeligt kan der gennem brugen af computerprogrammer som Maple kaldes matematik frem som rækker ud over gymnasimatematikken. Heri ligger der på den ene side en række muligheder for at adressere overgangen til videregående uddannelser, men på den anden side også en oplagt udfordring om at introducere Maple på hensigtsmæssigt vis.

² En nærmere beskrivelse findes nedenfor i afsnit 7.0.

³ Her refereres til det tidligere projekt støttet af UVM.

De fire områder vil adresseres eksplicit gennem hele projektet.

1. Projektets formål

Hovedformålet er at videreudvikle et eksisterende samarbejde mellem skolerne og MATH med henblik på at sætte lærerne i stand til at udvikle undervisningsforløb, der i særlig grad udnytter CAS programmernes styrkesider. Projektet retter sig mod at udvikle eksemplariske præsentationer, computerark, opgaver og elevaktiviteter inden for udvalgte områder samt kurser for gymnasielærere. Der sigtes endvidere mod at adressere de udfordringer, det elektroniske medie rejser, når skriftlige produkter ikke alene skal afleveres elektronisk, men også rettes og tilbageleveres elektronisk.

Samarbejdet med MATH, der i flere år har arbejdet med computerbaseret matematik, leverer undervisere og konsulenter til projektet giver muligheder for videndeling mellem videregående uddannelse og gymnasier. MATH's deltagelse er således en form for kvalitetssikring i forhold til kurser og udviklingsarbejde.

Samarbejdet med Institut for Naturfagernes Didaktik (IND) var påtænkt videreført med IND i samme rolle, som i 2008-2010 projektet. Dette fremgik også af den oprindelige ansøgning. I forbindelse med et gradvist større fokus på Maple's styrkesider, Maple i andre fag, avanceret brug af Maple samt ikke mindst overgangen til videregående uddannelser har det været mere naturligt med et samarbejde med DTU, idet Maple spiller en stor rolle i DTU's førstedelsundervisning på matintro og at en række af de problemstillinger vedrørende Maple som platform er fælles for undervisningen i gymnasiet og førstedel på KU og DTU.

2. Praktisk tilrettelæggelse

Grundstenen i projektet har været to efteruddannelseskurser, som MATH har afholdt for matematiklærerne fra de deltagende gymnasier. I overensstemmelse med hensigterne i projektansøgningen er begge kurser organiseres efter en model med tre etaper:

- 1) en udviklingsfase, hvor en mindre gruppe lærere fra skolerne, der allerede har Maple erfaringer samles med undervisere fra MATH for at udvikle ideer, der danner udgangspunkt for kurserne
- 2) selve kurserne, hvor forløbene udvikles i detaljer og løbende afprøves i klasserne

3) en opsamling hvor de udviklede forløb dokumenteres, færdigbearbejdes og stilles til rådighed for en bredere kreds

Ad 1) Kort efter skoleåret 2011/12 blev der af skolerne nedsat en udviklingsgruppe, der i efteråret 2011 afholdte et inspirationseminar med oplæg fra Niels Grønbæk og Rune Johansen, MATH samt Henrik Pedersen, KU LIFE. I forbindelse hermed blev det første af en række møder i gruppen afholdt, hvor man fastlagde rammerne for det videre arbejde. Gennem hele projektet har udviklingsgruppen holdt møder og den har været en værdifuld aktør i projektet – ikke kun via den konkrete planlægning, men også gennem gode internatbidrag og frugtbare didaktiske input. Udviklingsgruppens bidrag til projektet har således været noget større end det oprindeligt var intensionen både hvad angår mødeaktivitet, men ikke mindst kvalitativt.

Ad 2) Hvert af kurserne har været afviklet over tre tirsdage – to eftermiddage og en hel dag. Deltagerne har skullet forberede sig til hver gang. Kursusforløbet blev afsluttet med, at deltagerne skulle udarbejde et undervisningsforløb i Maple. Med to nye gymnasier i NØRD-samarbejdet var der et hensyn at tage i projektets start om at tilbyde en introduktion til Maple, som de andre gymnasiers lærere tidligere havde gennemført. Det første af kurserne blev således gennemført differentieret og henvendte sig dels til erfarne og uerfarne lærere. Det var så oplagt i forlængelse heraf at sætte fokus på introduktion af Maple og avanceret brug af Maple. Det andet kursus var emnemæssigt tematiseret i forhold til et fokus på Maple i andre fag og Maple i overgangen til videregående uddannelser. Fokus har på, hvordan IT- og CAS-værktøjer, baseret på matematikprogrammet Maple, kan bruges i matematikundervisningen inden for udvalgte emner, der særligt tilgodeser fokusområderne. Kurserne har desuden beskæftiget sig med de didaktiske problemer og muligheder, som emneområdet indeholder, specielt hvad angår brugen af CAS-værktøjer. I forbindelse med hvert af kurserne blev der oprettet en hjemmeside med program, materiale, meddelelser, mm. Kursushjemmesiderne kan findes via disse link;

<http://www.math.ku.dk/~m07jul/maple/>

<http://www.math.ku.dk/~rune/maple/>

Ad 3) I april 2012 og i januar 2013 er der blevet afholdt to internatmøder, hvor formålet har været at opsamle og distribuere de erfaringer, der er blevet gjort undervejs. Det overordnede tema for de to internater har fulgt temaerne for kurserne. Således var fokus på det første internat introduktion af Maple samt avanceret brug af Maple, mens det andet havde Maple i andre fag samt Maple i

overgangen til videregående uddannelser som tema. Endvidere har det som i det foregående samarbejde været intensionen, at internatopholdet skulle give øget mulighed for afprøvning af idéer og materiale og styrke dannelsen af netværk på tværs af de deltagende institutioner. På hvert af internaterne har der været oplæg fra professor Niels Grønbæk fra MATH.

Endeligt har alle projektdeltagerne ved hjælp af fildelingssystemet Dropbox haft mulighed for at dele det materiale, som de har udviklet med hinanden. Der er ikke offentlig adgang til disse filer, idet det også skulle være muligt for lærerne at lægge dokumenter ud, som var under udarbejdelse og dermed halvfærdige. Der er imidlertid oprettet en hjemmeside www.mcmgym.dk i forbindelse med projektets færdiggørelse, hvor nogle få eksemplariske dokumenter fra projektet er tilgængelige. Ved henvendelse kan man få adgang til flere af dokumenterne⁴.

Der har været gennemført to evalueringsrunder. Temaerne for den første evalueringsrunde har omhandlet sammenhæng mellem brug af Maple og lærebøger, samt de særlige forhold, der gør sig gældende på HTX mens temaerne for den anden evalueringsrunde har skullet behandle brug af Maple i andre fag, samt Maple brugt i større undervisningsforløb så som projektarbejde - evt. i forbindelse med studierejse, etc. Evalueringen er gennemført som besøg i en klasse eller hold – typisk med overværelse af en times undervisning efterfulgt af fokusgruppeinterview med en håndfuld elever, udvalgt af læreren og som bredt repræsenterede synspunkter på matematikundervisningen, og endeligt et interview med læreren. Resultatet af evalueringen indgår sammen med den opsamlende drøftelse med udviklingsgruppen (se nedenfor) som en væsentlig del af projektevalueringen. Endeligt har temaer fra evalueringen indgået i internaterne – mest konkret på det første i form af elevoplæg om erfaringer med brug af Maple på HTX.

Projektet blev afsluttet med et opsamlende formiddagsmøde i udviklingsgruppen, samt et mindre seminar, med oplægsholdere fra MATH og DTU. Formiddagsprogrammet bestod af oplæg fra en repræsentant fra hver af de deltagende skoler med følgende temaer;

- Introduktionen til Maple, Københavns Åbne Gymnasium.
- Avanceret brug af Maple, Nørre Gymnasium
- En særlig HTX vinkel på Maple – introduktion, brug i andre fag mm., HTX Lyngby.
- Brug af Maple i andre fag, Aurehøj Gymnasium

⁴ Der er 300-400 i alt. Det er svært at gøre op. Der er et arkiveringssystem, således at det samme dokument kan ligge i flere mapper.

- Overgang til videregående uddannelse, Christianshavns Gymnasium
- Efteruddannelse/ lærerkompetence, Sankt Annæ Gymnasium
- Maple, videndeling og lærersamarbejde, Gefion Gymnasium.

I første del redegjorde projektansvarlige Henrik Bang og Claus Larsen (CG) endvidere kort for elevperspektiver på Maple. Dette med udgangspunkt i de gennemførte fokusgruppeinterview. Oplægsholderne skulle præsentere et 15 minutters oplæg der dels redegør for hvordan arbejdets status er på skolen og hvilke udviklingsmuligheder/problemer man ser, og dels forholder sig til ét de aspekter som projektet satte fokus på. Oplæggene og den efterfølgende diskussion var led i en grundigere evaluering af projektet både på den enkelte skole og hvad angår samarbejdet. Resultaterne fra seancen indgår i projektevalueringen.

3. Medvirkende og deres hovedopgaver

Projektets styregruppe, der har stået for den overordnede planlægning og gennemførelse af projektet, har bestået af Professor Niels Grønæk, Institut for Matematiske Fag, Københavns Universitet, samt Lektor Claus Larsen og Lektor Henrik Bang, Christianshavns Gymnasium.

Der har endvidere været oprettet en udviklingsgruppe bestående af lærere (Nils Fruensgaard, Københavns Åbne Gymnasium, Leif Horn og Michael Lund, Nørre Gymnasium, Ulrik Pedersen og Jan Steffensen, Aurahøj Gymnasium, Jan Boddum Larsen, HTX Lyngby, Sten Kentved, Gefion, samt Claus Larsen og Henrik Bang, Christianshavns Gymnasium) fra de deltagende skoler. Den overordnede planlægning af kurser, internater samt afsluttende seminar har styregruppen stået for, mens udviklingsgruppen har stået for detailplanlægning af seminarerne.

Claus Larsen har været økonomiansvarlig, mens Claus Larsen og Henrik Bang har gennemført evaluering af undervisningsforløbene, samt haft ansvar for projektevaluering og rapportskrivningen.

Christianshavns Gymnasium har på vegne af NØRD skolerne været projektansøgere, mens Institut for Matematiske Fag, Københavns Universitet har stået for videreudviklingen af efteruddannelseskurserne for de deltagende gymnasielærere. Rune Johansen, Ph.d. har været ansvarlig for udarbejdelsen af materiale til og afviklingen af det første af efteruddannelseskurserne efter anvisninger fra udviklingsgruppen. Han har desuden videreformidlet erfaringerne herfra til Jan Ulrich Lauridsen, der har stået for planlægning og gennemførelse af det andet kursus.

NØRD er et åbent samarbejdsforum af gymnasier samlet om udvikling af matematisk og naturvidenskabelig undervisning. De deltagende gymnasier i dette projekt har været Aurehøj Gymnasium, Christianshavns Gymnasium, Gefion Gymnasium, HTX Lyngby, Københavns Åbne Gymnasium, Nørre Gymnasium og Sankt Annæ Gymnasium. Gymnasierne har iværksat lærernes efteruddannelse i Maple samt bidraget med lærere og elever til implementeringen af Maple i undervisningen. Rektor Troels Vang Andersen, Christianshavns Gymnasium har været repræsentant for gymnasieskolernes ledelse

4. Gennemførte aktiviteter i form af møder konferencer mv.

Der har igennem hele projektforsløbet været afholdt møder i styregruppen vedrørende planlægning af evalueringer, internatmøder og seminar. De fleste møder har ud over et logistisk/praktisk indhold med henblik på at facilitere projektets forskellige begivenheder, tillige haft et didaktisk indhold. Gennem hele projektforsløbet har der været afholdt møder i udviklingsgruppen. Omfanget af denne aktivitet har været betragteligt større end beskrevet i projektansøgningen, idet bla.a. alle oplæg på internatkurserne har været præsenteret her, endvidere har vi haft lejlighed til at have et oplæg om Maple TA arrangeret af de daværende Maple forhandler Adept

De egentlige erfaringsindsamlinger, distribution af materialer inspiration fra forskere mm., er dog foregået på de to internatmøder i i Holbæk på Søminestationen. Program og deltagerliste for de to internatmøder fremgår af bilagene 1 til 4.

Det afsluttende seminar afholdtes på Institut for Matematiske Fag, Københavns Universitet. Program fremgår af bilag 5.

5. Projektets hovedresultater

Der har forud for til kurserne i dette projekt i alt været afholdt tre kursusomgang – hver med en struktur, der minder om strukturen på de to kurser afholdt inden for rammerne af nærværende projekt. Nærværende projekts kurser er så en videreudvikling af de foregående med de nødvendige justeringer i forhold til erfaringer, evalueringer og nye målgrupper. Kursusprogram, samt materialer og opgaver i forbindelse dermed findes på følgende links; <http://www.math.ku.dk/~m07jul/maple/>
<http://www.math.ku.dk/~rune/maple/>

Der er blevet afholdt to internater. Deltagerlister fremgår af bilag 1 og 2. Oplæg kan findes på www.mcmgym.dk

Der er blevet udviklet en substantiel mængde undervisningsmateriale i form af arbejdsark, klippearke, skabeloner, standartbesvarelser, samt materiale til brug i forbindelse med større skriftlige opgaver, avanceret brug af Maple, Maple brugt eksplorerende og Maple brugt i forbindelse med MATH's besøgsprogram. Disse filer er arkiveret i fildelingssystemet dropbox. Enkelte filer kan findes på www.mcmgym.dk eller ved henvendelse til CMU⁵.

6. Udviklede efteruddannelses tilbud og formidlingen heraf

Strukturen i efteruddannelsen i brug af Maple har en række træk, som er karakteristisk for et moderne efteruddannelses tilbud. For det første er der dannet et konsortium med flere interessenter – først og fremmest NØRD-sammenslutningen og MATH, som har været interesseret i at være fælles om et efteruddannelses tilbud. MATH har haft interesse i at tilbyde et færdigt efteruddannelses tilbud inden for computerbaseret matematik. Skolerne har haft en interesse i at have en ramme for systematisk kompetenceudvikling af matematiklærere, som var attraktiv for lærerne og billig for skolerne. Endeligt har skolerne og MATH været interesseret i dialogen - skolerne for at finde ud af, i hvilken retning deres matematikundervisning skal gå for at kvalificere til universiteterne og MATH med hensyn til, hvad de kan forvente, når de rekrutterer studerende. Fagligt betyder dette at matematik også ses i lyset af overgangen mellem gymnasium og videregående uddannelser men vigtigst nok ikke kun i et perspektiv, hvor den afsluttende (skriftlige) eksamen er altdominerende.

Efteruddannelsen er en faglig efteruddannelse. Med sin deltagelse i kurset har man gennem forberedelse og udviklingen af undervisningsforløb udviklet faglige kompetencer - i denne proces er ikke mindst hjemmearbejdet vigtigt. Endeligt er den efterfølgende didaktiske diskussion, der har fundet sted på de to internater, central - dels i forhold til den daglige undervisning, hvor den forudsættes for en sund implementering af computere i matematikundervisningen og dels i forhold til en validering af projektets konklusioner.

⁵ Center for Computerbaseret Matematikundervisning (CMU) er et Center oprettet i forlængelse af samarbejdet i nærværende projekt. En hjemmeside er under oprettelse; <http://www.math.ku.dk/forskning/CMU>

Nogle af de didaktiske spørgsmål rejses vedvarende, nogle besvares og nye kommer til. Hvordan indføres Maple som en del af matematikundervisningen? Hvilke muligheder giver indførelsen af nyt værktøj, hvilke begrænsninger sætter det? Er der emneområder, som bliver trivielle, er der emner, som særligt egner sig til en behandling via Maple? Påvirker indførelse i Maple elevernes måde at kommunikere med hinanden på? Hvorledes påvirkes elevernes kommunikation med læreren? Hvad bliver lærerens rolle? Hvorledes kan Maple bruges i andre fag og i forbindelse med større tværfaglige opgaver? Spørgsmålene trænger sig vedvarende på. Alt afhængig af faglige og institutionelle rammer vil et nuanceret svar kræve en langt større indsats.

Den enkelte lærers indgang til efteruddannelsen i projektet er noget forskellig. Nogle har alene har beskæftiget sig med CAS – værktøj ved hjælp af håndholdte lommeregner, mens andre har et vist kendskab til forskellige computerprogrammer. De fleste er enige om, at overgang til computerbrug ikke kun repræsenterer et andet (og uomgængeligt) værktøj, men involverer mange sider af matematikundervisningen og selv kompetente bruger har udtrykt behov for vedvarende efteruddannelse.

7. Evaluering af projektet og dets opfølgning

Formålet med denne rapport er at dokumentere, at projektansøgningens konkrete tiltag er blevet realiseret såvel som at formidle de resultater og erfaringer, projektet har kastet af sig i form af materialer, arbejdsformer og anbefalinger til videre arbejde. En del af dette findes ovenfor i de foregående afsnit. Nedenfor er et fokus på de erfaringer projektet har genereret inden for de forskellige fokusområder og forslag til opfølgning, samt ikke mindst en del vedrørende Maple og den faglige diskurs.

Som indgang til afsnittet kan man tage følgende citat;

*Jo mere jeg fosøger at lære mine elever, desto dårligere klarer de sig til eksamen.*⁶

Det er tale om et ægte paradoks. Man skulle tro at mere undervisning i matematik ville give bedre resultater ved skriftlig matematik eksamen, men en del erfaring viser, at man til en vis grad klarer eksamen bedre med hjælpemidler der ikke fordrer så meget matematik, men som beherskes målrettet mod opgaverne. Maple er et program der fordrer matematik og ikke helt nemt målrettes bestemte eksamensopgaver.

⁶ Formuleret af en deltager i forbindelse med et oplæg om brug af matematik i fysik ved internatet januar 2013.

7.0 Indledning

Computerbaseret matematik i gymnasiet har ikke en lang historie, men fra 1990'erne har der været begrænsede programmer til rådighed, der f.eks. kunne bruges til at anskueliggøre differentialligninger. CAS værktøjer blev udbredt med de avancerede lommeregnere i 0'erne, der startede med muligheder for at tegne funktioner og som tilbød grafisk ligningsløsning, men senere blev udviklet med regressions værktøjer og ikke mindst med muligheder for mere udviklede algebraisk ligningsløsning.

At de avancerede lommeregnere fandt vej til den gymnasiale undervisning var ikke en selvfølge - i en del lande var man langt mere tilbageholdende. I Danmark slog CAS lommeregneren igennem, fordi det blandt andet blev set som en mulighed for et løft af eleverne i forståelse af begreber, men også for at tilbyde mere motiverende, varierende og eksplorerende arbejdsformer samt mere realistiske anvendelser. En fordel ved CAS lommeregneren var naturligvis dens ringe størrelse og derfor dens umiddelbare integrering i en traditionel klasserums undervisning.

CAS lommeregneren har også oplagte begrænsninger. Dens grafiske flade giver ikke muligheder for samme detaljer som en computerskærm, og menuer og hjælpefaciliteter er enten begrænsede eller vanskeligt tilgængelige. Endeligt er det ikke mindst vanskeligt at dokumentere fremgangsmåde, mellemregninger osv., ligesom det er vanskeligt at overføre resultater fra en lommeregner til andre dokumenter.

Da bærbare PC'ere blev billigere og mange elever allerede havde en var det oplagt at interessere sig for hvordan computerbaserede CAS systemer bliver brugt og kunne bruges i gymnasieskolen.

Det er mange muligheder for computerbaserede CAS systemer f.eks. GeoGebra eller matematik integreret i Word, samt ikke mindst videreudviklingen fra lommeregneren – TI-inspire. Blandt mulige platforme var det også naturligt at se på den platform som de fleste videregående uddannelser i Danmark har valgt nemlig Maple. Ud over den mulighed det giver for at samarbejde med f.eks. Institut for matematiske Fag, på Københavns Universitet og Compute på DTU, er Maple også en fleksibel og avanceret platform, der både kræver en matematisk indsigt og – ved hensigtsmæssig brug giver ny indsigt.

Grundtanken i projektet har derfor løbende været, hvordan de deltagende skoler i dialog med MATH og andre der har erfaring med Maple i undervisningsbrug kan udforme forløb, der i

gymnasiet ikke blot bruger Maple som en ny avanceret lommeregner til løsning af opgaver, men har fokus forbindelsen mellem Maple og det tiltænkte matematik indhold.

I tråd med denne didaktiske tilgang udformedes projektet med et didaktisk fokus på 4 områder, som er nævnt ovenfor:

1. Maple i introduktionen til gymnasiet
2. Maple i samarbejde med andre fag
3. Maples styrkesider
4. Maple i overgangen til videregående uddannelser.

Disse fokusområder blev behandlet separat på de to todages seminarer i projektperioden og de efterfølgende overvejelser skal ses på grundlag heraf.

7.1 Overvejelser angående projektets fokusområder

Ad 1. Maple i introduktionen til gymnasiet

Her er set på hvordan Maple hensigtsmæssigt introduceres til elever i 1. g. og 1. HF.

Grundlæggende handler det om at vænne eleverne til at arbejde med computeren hensigtsmæssigt - herunder ikke blot bevidstløst at bruge Maplekommandoer.

Metoderne der her lægges vægt på er eksempelvis i starten at bruge Maple som skrivemaskine i ”document mode” og ikke bruge Maples regnekraft, men blot udnytte de mange specielle tegn og muligheder for at stille opgaver pænt op.

Det handler også om at give eleverne mulighed for at beherske matematiske færdigheder uden at bruge Maple’s avancerede kommandoer med det samme – men implementere det i trinsvist i Maple. Maple kan så evt. bruges som det man kalder ”simuleret håndregning” – dvs. blot til at udføre (mellem-) regninger og ikke med brug af kraftigere virkemidler som f.eks. *solve* kommandoen. Det handler i introduktionen også om at styrke brugen af den korrekte syntaks. dvs. at se at Maple er konsekvent vedrørende brug af tegn, brøkstreger, parenteser osv. og herunder hvordan Maples output og fejlmeldinger læses. I den forbindelse er det især *plot* kommandoen og senere i introduktionen *solve* og *fsolve* kommandoerne det er vigtigt at arbejde med.

Ad 2. Maple i samarbejde med andre fag

I samarbejdet med andre fag har fokus har været på hensigtsmæssigt samarbejde med fag, hvor matematik bruges en del, speciel har der været set på samfundsfag, biologi, fysik og kemi.

Med hensyn til fysik har der været et vist overlap med avanceret brug (Maples styrkesider), fordi faget i høj grad på specielt A niveau bruger matematik.

Maple bliver let avanceret i forhold til de faglige mål i andre fag (og nogle gange også i forhold til lærerkompetencer) men grundlæggende giver Maple gode muligheder for modellering og simulering. De afprøvede og fremlagte forløb gav eksempler på modellering af jordskælv, på simulering i forbindelse med Chi-i-andenfordelingen og på brug af forskellige varianter af logistisk vækst i forhold til biologiske forsøg.

Selv relativt simple problemstillinger inden for andre fag er ofte forbundet med at skære Maple til så det virker simpelt. Så kan eleverne imidlertid ikke selv håndtere gangen i programmet men er henvist til at bruge det som en slags blackbox, hvor de f.eks. kan undersøge, hvad bestemte parametre betyder for outputtet, men hvor selve koden er uigennemskuelig eller ligefrem skjult for dem. En uddybning af problemstillingen behandles nedenfor under afsnittet ”Instrumentel Maple” men er naturligvis ikke kun et problem i forhold til Maple men omfatter computer programmer generelt.

En anden vanskelighed er, at andre fag – ofte meget velbegrundet- foretrækker andre programmer som Excel i samfundsfag og Logger Pro i fysik og kemi. Programmerne har alle deres styrkesider, men problemet er så også, at eleverne ikke opnår den nødvendige rutine inden for hver af programmerne, hvis de præsenteres for mange programmer.

Et vigtigt emne, der har været belyst i forbindelse med Maple i andre fag, er hvordan man hensigtsmæssigt bruger enheder i Maple. *Units* giver en mulighed men virker ikke altid sammen med *solve*. Alternativt kan man i visse problemstillinger lade bestemte konstanter indgå som variable uden enhed (f.eks. c, h eller e).

Ad 3. Maples styrkesider

Der er mange områder hvor Maple har særlig gode faciliteter. Det gælder f.eks. ligninger med flere variable, differentialligninger eller illustration af integraler.

I projektet har særligt været belyst parameterkurver hvor Maple giver gode muligheder for at simulere og undersøge bevægelser f.eks. i Tivoli forlystelser. Vægten lægges her på, at eleverne faktisk i høj grad selv er i stand til at følge modelleringsprocessen

En anden oplagt avanceret anvendelse er rumgeometri hvor man kan illustrere mange vigtige egenskaber og skæringer. På projektets hjemmeside findes et oplæg om Gaudis katedral i Barcelona, der trækker på Maples faciliteter.

Et problem i forhold til Maples styrkesider kan illustreres ved løsning af ligningssystemer. En oplagt måde at tilrettelægge det på er ved at lade elever arbejde med to ligninger med to ubekendte – og måske i begrænset omfang med 3 ligninger med tre ubekendte, men så kan man herfra lade Maple tage over og arbejde f.eks. med 2 ligninger med 3 ubekendte 4 ligninger med... og se at der nu er flere muligheder end i det simple tilfælde. Problemet er bare at i STX er der ikke krav om sådanne udvidelser – der f.eks. kunne bruges til skæring mellem planer. Og eleverne kommer derfor ikke til at opleve hvor Maple faktisk tilføjer nyt. Dette gælder dog ikke på HTX hvor 3 ligninger med 3 ubekendte er pensum.

Vi vil behandle problemstillingen nedenfor, hvor vi diskuterer, at man ofte i gymnasiet ”betræder så smal en sti”, at oplagte undersøgelser/udvidelser, hvor Maple virkelig kommer til sin ret skal placeres i valgfrie forløb og derfor sjældnere kommer i spil.

Ad 4. Maple i overgangen til videregående uddannelser.

Overgangen til videregående uddannelse var et af de centrale motiver til netop at fokusere på Maple. Den oplagte mulighed er at udnytte elevernes kendskab til Maple i forbindelse med f.eks. Institut for Matematiske Fags besøgsprogram. Naturligvis er det kun en meget lille del af eleverne der skal videre med specielle matematik uddannelser, men alligevel er det relevant for mange at kende til hvad det vil sige at studere matematik, hvordan matematik kan se ud efter gymnasiet osv.

Vi har i projektet arbejdet med to områder der i en vis forstand begge søger om bag Maple og ser på den underliggende matematik. Det ene emne drejer sig om talbegrebet og en forståelse for, hvordan Maples brug af eksakte tal som kvadratrodder egentlig finder sted og hvordan man f.eks. kan rækkeudvikle. Det andet forløb undersøger differentiabilitet (og uniform kontinuitet) og specielt hvilke kurver/grafer det er muligt at tegne i Maple. Begge forløb indebærer et besøg på matematisk institut, hvor problemstillingen introduceres og hvor forskellige Maple ark vises. Efterfølgende skal eleverne hjemme på skolen arbejde videre med problemstillingen hen imod et nyt besøg hvor elevernes arbejde samles op. Maple er platformen for arbejdet, men fokus har været på den matematiske substans. Flere af de faglige pointer havde dog været vanskelige at nå frem til uden brug af Maple.

7.2 Maple og matematik

Instrumentel tilgang

Som nævnt ovenfor er tendenser til at bruge Maple instrumentelt et løbende tema. For så vidt gælder det allerede enkle kommandoer som *solve*, der hvis den bruges på ikke helt simple funktioner giver resultater som er vanskeligt for eleverne at fortolke. I første omgang kan man bare fortælle, f.eks. at komplekse løsninger i virkeligheden betyder ”ingen løsning”, men problemet dukker op mange steder, f.eks. hvis *solve* bruges til at finde skæring mellem funktioner eller hvis der er flere løsninger.

Ofte må læreren så opstille regler for, hvordan man skal fortolke outputtet eller hvordan Maple kommandoerne skal sættes sammen. Det er imidlertid vanskeligt ad den vej for eleverne at se om det drejer sig om egentlige matematiske problemer (hvad det oftest gør) eller om det blot er Maple, der har svært ved at løse f.eks. simple eksamensopgaver -hvad der meget vel også kan være tilfældet. Bagved ligger i nogle tilfælde at begrebet *omvendt funktion* ikke behandles særlig grundigt i gymnasiet men er en vigtig del af brugen og forståelsen af *solve*.

Instrumentelle tilgange optræder ofte fordi vi i gymnasiet kun har et begrænset sigte med undervisningen – og f.eks. ikke gør så meget ud af funktionsbegrebet i forhold til ligningsbegrebet hvilket gør en kommando som *unapply* temmelig uforståelig, når man ønsker at omdanne den ligning Maple giver f.eks. ved regression til en funktion. Det kan være motivet til f.eks. at bruge Gym – pakken der skjuler nogle af den slags kommandoer, men det gør det næppe mindre instrumentelt – snarere mere.

Nogle gange – som ved regression eller Chi-i-anden test er den instrumentelle vej måske den eneste mulige, men faren er, at der udvikles en undervisningskultur, hvor der så at sige findes ark til hver slags opgave og det blot drejer sig om at finde det rigtige og sætte ind. Eleverne vil så vanskeligt kunne skelne mellem det at kunne Maple og det at kunne noget matematik.

Problemstillingen er ikke unik for Maple – f.eks. GeoGebra har lignende instrumentelle træk – hvis man ikke kender til vektorregning eller forstår at ”måling af en vinkel” er en form for sammenligning med en kendt vinkel er det temmelig uforståeligt hvordan det f.eks. er muligt at afsætte en vinkel med en given størrelse når nu vinkelmåler ikke er et konstruktionsredskab.

Vertikal og horisontal udfoldning

Den smalle sti er en metafor for en undervisning, der savner en horisontal udfoldning⁷.

Det er berørt ovenfor. Tilsvarende kan man også bruge begrebet vertikal udfoldning. Begge problemstillinger vedrører, at det ofte for at forstå og beherske matematiske begreber og procedurer er nødvendigt at udfolde dem. Det være sig i bredden for at se begreber og procedurer anvendt på andre matematikområder end der hvor de først er introduceret eller i dybden hvor man bygger videre på begreberne og procedurerne og giver dem mere indhold. Begge udfoldninger har gode muligheder med Maple, og i modsætning til den instrumentelle tilgang vil der her være gode muligheder for at eleverne selv kan udfordre/udforske forholdet mellem Maple og den matematik der arbejdes med. Det gælder som nævnt f.eks. løsning af to lineære ligninger med to ubekendte, hvor en udvidelse til flere ligninger udfolder løsningsbegrebet bredere, men det gælder også emner som brug af 0-reglen og faktorisering ved løsning af simple 2. gradsligninger – der kan gives yderligere mening hvis man ser på polynomier mere generelt.

Maple giver rigtig mange muligheder for at tilrettelægge forløb, hvor man undersøger og udvider på grundlag af simple eksempler, som man laver i hånden eller ved simuleret håndregning i Maple. Det er dog desværre ofte tidskrævende og en del elever vil ikke se meningen med konstant at bruge Maple til udvidelser, når der nu ikke er et eksamensmæssigt krav om at man går den vej.

Autenticitet

Det at tilskrive en mening til den matematik, der undervises i har været genstand for diskussion i det danske uddannelsessystem gennem mange år. Der har været bred enighed om at autentisk eller realistisk matematik klart er positivt ladet. Dermed hører enigheden også op⁸. I folkeskolens øverste klasser er autentisk matematik en matematik, som eleverne kan bruge i deres hverdag eller måske i samfundet. Der kan også være en tilbøjelighed til især på C-niveau at lægge et lignende samfundsmæssigt perspektiv på det man kunne kalde autentisk matematik. Problemet er imidlertid at matematikken på dette niveau i uddannelsessystemet ikke er særlig avanceret og at man kun tilnærmelsesvist kan komme tæt på de reelle problemstillinger, især hvis eleverne (af gode grunde) ikke kommer tæt på de modeller og kvantitative metoder, der anvendes. Dermed fremstår anvendelsen af matematikken i en given samfundsmæssig sammenhæng enten som et postulat eller

⁷ Se eksempelvis Hans Freudenthal eller Claus Michelsen. Begreb om horisontal og vertikal matematisering.

⁸ Vi vil ikke gå videre med en lang diskussion her, men se eksempelvis Gravemeijer & Doorman (1999); ”Context problems in realistic Mathematics”, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers.

den afspejler ikke den matematik, der faktisk bruges. Autenticiteten er her knyttet til det man kan kalde fortællingen om den anvendte matematik. Der er ingen grund til at opgive den fortælling, idet den for en del elever kan være motiverende. Programmer som Maple - med simulering, grafiske illustrationer, plastiske modeller udarbejdet af læreren - kan endda være med til at anskueliggøre reelle anvendelser, hvor eleverne kommer tættere på de metoder der faktisk bruges.

Eleverne på de øverste niveauer i gymnasiet og med deres blik for deres egen videreuddannelse oplever i første omgang det, der er relevant i forhold til studentereksamen som yderst autentisk – alene i kraft af studentereksamens karakterernes betydning. Denne form for skolemæssig autenticitet er lidt andeledes end den første, men uden at eleverne oplever et reelt behov for beherskelse af Maple og tilsvarende mere avancerede programmer er der en fare for at fokus flyttes til andre elektroniske hjælpemidler eller til simplificerede Maple ark – heri ligger en opfordring til at de afsluttende eksaminer skriftlige såvel som mundtlige i et vist omfang udformes så de lægger op til at CAS brugen reelt ligger i nogle af CAS styrkesider.

Mange elever er med lidt tilskyndelse parate til at kaste et blik videre til den matematik de vil møde i deres videreuddannelse. I og med at Maple bruges som platform på en række videregående uddannelser - er det oplagt at tilrettelægge forløb som repræsenterer en matematik der peger i denne retning Alene af den grund således at valg af videreuddannelse træffes på et realistisk grundlag.

Matematikken i Maple

En særlig vinkel på Maple som specielt har været belyst i temaet om overgang til videregående uddannelse er hvordan matematikken præsenterer sig i Maple. Pointen er at Maple og andre computer værktøjer jo ikke kun er redskaber til at anvende matematik. Det giver muligheder for at præsentere matematik på en anden måde end hidtil og man kan også undersøge problemer på en ny måde. Denne tilgang kræver imidlertid særlig opmærksomhed også om den bagved liggende matematik i Maple selv – hvad er f.eks. eksakte tal i forhold til decimaludvikling af tal, hvad er en graf i Maple osv.

Det er (endnu) ikke naturligt at stille den slags spørgsmål i den gymnasiale undervisning, hvor mantraet er at vi har matematikken på den ene side og så har et redskab til at anvende den på konkrete problemer/opgaver/undersøgelser på den anden side. Men allerede et undersøgelseskoncept lægger op til en anden holdning til computerbrug og derfor vil synspunktet

måske skifte i de kommende år, men det kræver at dette aspekt står stærkere også i evalueringer/eksaminer end det gør i dag.

7.3 Opfølgning på projektet – oprettelsen af CMU

Overvejelserne i afsnit 7.2 viser på den ene side at konstruktiv brug af Maple og andre computerbaserede matematikprogrammer har muligheder for at tilføre (gymnasie) matematikken nye dimensioner i form af horisontale og vertikale udfoldninger og i form af en ny tilgang til hvordan man undersøger og præsenterer matematiske problemer. Vi har også tidligere set at Maple's muligheder for at modellere kan motivere brug af matematisk modellering i andre fag, og vi har set at Maple i introducerende undervisning kan være med til at fastholde stringens i forhold til matematiske begreber og procedurer.

Det er vigtigt at dette fokus fastholdes i gymnasiets computerbrug.

Omvendt er den instrumentelle tilgang som også blev beskrevet oven for en fare der lurder hele tiden – ikke kun i områder hvor der satses på anvendelse som i regression og chi-i-anden test, men også mange andre steder hvor Maple kan blive reduceret til en slags redskab til opgaveløsning ikke mindst af eksamensopgaver. Dels er det vigtigt at den instrumentelle tilgang begrænses og at der i de områder hvor den i dag bruges arbejdes med tilgange hvor eleverne i højere grad får fat i matematikken dels at der arbejdes med opgavetyper og eksamensformer der bedre understøtter det læringsmæssige potentiale i programmer som Maple.

For at adressere disse problemer også fremover er et af de vigtigste afkast af projektet at MATH har besluttet at oprette et Center for Computerbaseret Matematikundervisning. Centrets formål er at stimulere at der fortsat i gymnasieskolen foregår udviklingsarbejde med computere hvor det matematiske indhold er i fokus. Erfaringerne fra det nærværende projekt er afsat for et tilbud om at coache lærere i udvikling af eksemplariske forløb, der både kan tjene som en efteruddannelse af dem selv og gennem videndeling løfte undervisningen bredere set.